Des pentagones aux heptagones, une infinité de différences

Vivre en géométrie hyperbolique

Alexis Langlois-Rémillard
avec la contribution de Luce Langlois et de Toon Baeyens

2020-09-23

Université de Gand

Introduction ponctuelle

Hiver 2016, germe de l'idée

Dror Bar-Natan ***The hardest math I've ever really used.***

Une conférence grand public sur un phénomène hyperbolique au cinéma (Réunion d'hiver de la SMC, Niagara Falls, 2016).

Dror Bar-Natan, 1999

Hiver 2016, germe de l'idée

Dror Bar-Natan ***The hardest math I've ever really used*.**

Une conférence grand public sur un phénomène hyperbolique au cinéma (Réunion d'hiver de la SMC, Niagara Falls, 2016).

Réalisation

J'étais incapable d'expliquer sa conférence à ma mère.

Hiver 2016, germe de l'idée

Dror Bar-Natan *The hardest math I've ever really used*.

Une conférence grand public sur un phénomène hyperbolique au cinéma (Réunion d'hiver de la SMC, Niagara Falls, 2016).

Réalisation

J'étais incapable d'expliquer sa conférence à ma mère.

Raison

Elle ne pouvait pas interagir et les « faits » n'étaient pas des évidences.

Vivre la géométrie

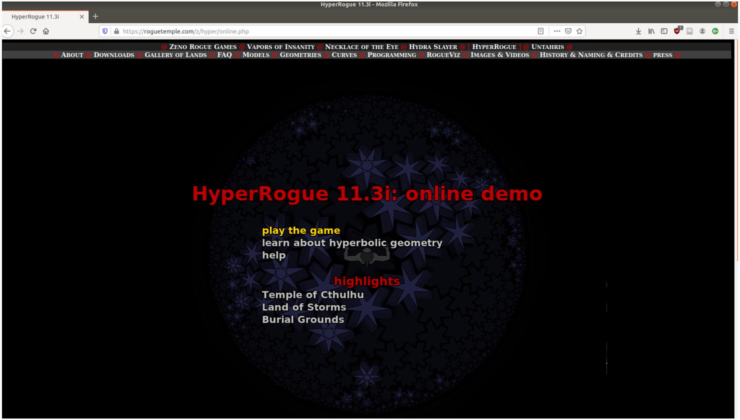
Interaction

HyperRogue

Créé par : Zeno Rogue (Eryk Kopczyński)

Naviguez vers ce site web :
`https://www.roguetemple.com/z/hyper/online.php` ou téléchargez le jeu HyperRogue sur votre mobile

Guide



Play the game, et explorez ! HyperRogue

`https://www.roguetemple.com/z/hyper/online.php`

Trois questions

1. Où réside(nt) la(es) différence(s) ?
2. Est-il plus facile ou plus difficile de s'échapper ?
3. Pouvez-vous trouver des objets géométriques familiers ?

J'explore avec vous.

Les différences

Les heptagones

Ballon de soccer – Icosaèdre tronqué

Un chat sur un heptagone

Stratégies

Plan euclidien

Fuite du chat – mouvement 1

Stratégies

Plan euclidien

Fuite du chat – mouvement 2

Stratégies

Plan euclidien

Fuite du chat – mouvement 3

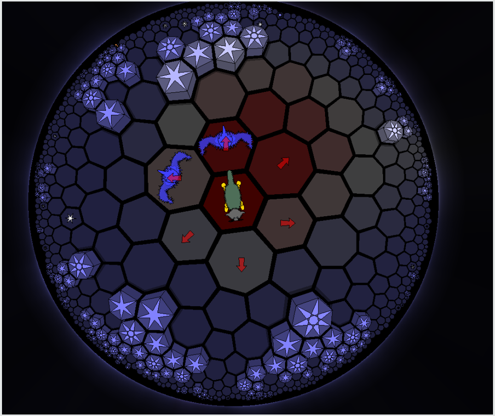
Stratégies

Plan euclidien

Fuite du chat – mouvement 4

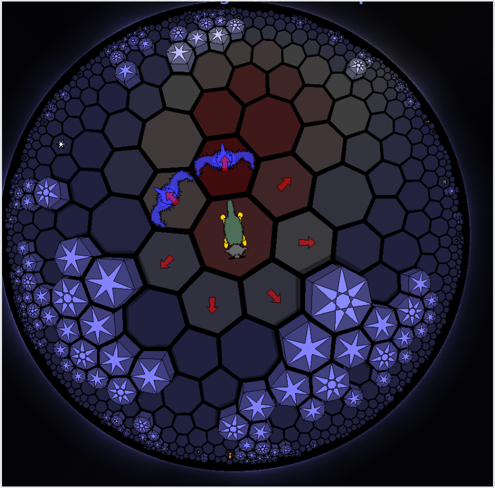
Stratégies

Le chat fugueur tourne les tables



Fuite du chat – mouvement 1

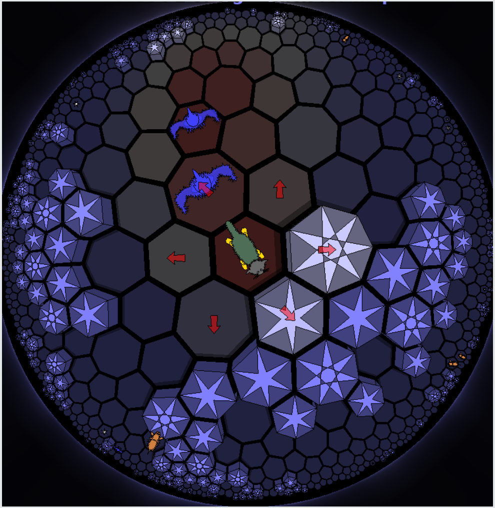
Le chat fugueur tourne les tables



Fuite du chat – mouvement 2

Stratégies

Le chat fugueur tourne les tables



Combat du chat – mouvement 3

Stratégies

Le chat fugueur tourne les tables

Combat du chat – mouvement 4

Le chat fugueur tourne les tables

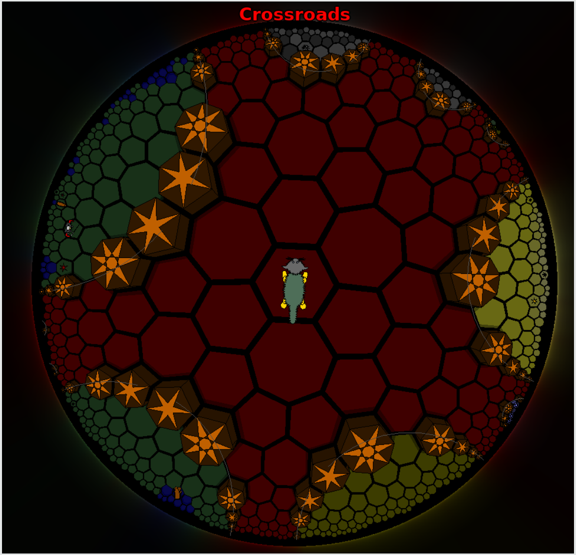
Victoire du chat – mouvement 5

Le chat sur la sphère se désole

Chat tenaillé craint les yétis froids

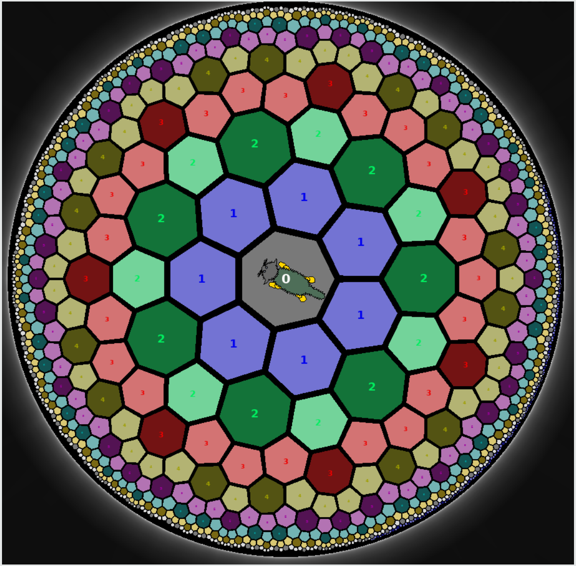
Objets familiers, et moins

Des lignes droites



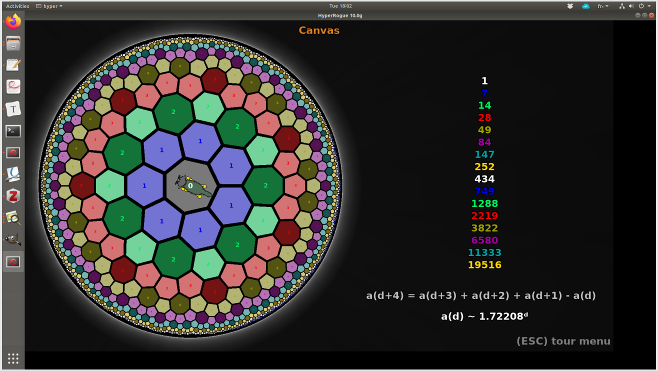
Objets familiers, et moins

Cercles



De la circonférence d'un cercle

Cercles



Cercles et le nombre de tuiles

De la circonférence d'un cercle

Circonférence d'un cercle discret

Soit a_d le nombre de tuiles à d pas de la position.

$$a_{d+4} = a_{d+3} + a_{d+2} + a_{d+1} - a_d,$$
$$a_1 = 7,\ a_2 = 14,\ a_3 = 28,\ a_4 = 49$$

Supposons $a_d = r^d$. Le polynôme caractéristique est

$$r^d(r^4 - r^3 - r^2 - r^1 + 1) = 0.$$

Il y a 4 solutions r_i, dont $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}+\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}$ donc

$$a_d = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n + \delta r_4^n,$$

et les conditions initiales permettent de résoudre.

De la circonférence d'un cercle

Résolution exacte

$$
\begin{aligned}
a_d = -\frac{4032}{13\sqrt{2+2\sqrt{13}}\sqrt{2\sqrt{13}-2}\left(\left(1+\sqrt{13}\right)\sqrt{2\sqrt{13}-2}+2\sqrt{13}+6\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{2\sqrt{13}-2}+1\right)^2} \\
\Bigg[\frac{\left(25\left(\sqrt{13}+\frac{91}{25}\right)\sqrt{2\sqrt{13}-2}+60\sqrt{13}+208\right)\sqrt{2+2\sqrt{13}}\left(1/4+1/4\sqrt{13}-1/4\sqrt{2\sqrt{13}-2}\right)^d}{18} \\
-\frac{\left(25\left(\sqrt{13}+\frac{91}{25}\right)\sqrt{2\sqrt{13}-2}+60\sqrt{13}+208\right)\sqrt{2+2\sqrt{13}}\left(1/4+1/4\sqrt{13}+1/4\sqrt{2\sqrt{13}-2}\right)^d}{18} \\
+i\left(\left(\sqrt{13}-\frac{13}{9}\right)\sqrt{2\sqrt{13}-2}+4/3\sqrt{13}\right)\left(\left(1/4-1/4\sqrt{13}+i/4\sqrt{2+2\sqrt{13}}\right)^d\right. \\
\left.-\left(1/4-1/4\sqrt{13}-i/4\sqrt{2+2\sqrt{13}}\right)^d\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

De la circonférence d'un cercle

Résolution plus propre

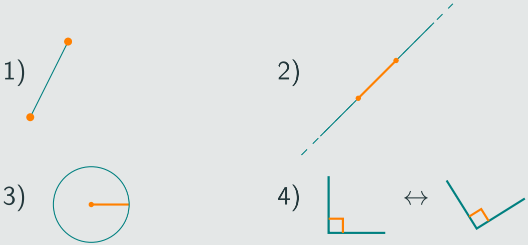
$$a_d \sim O(r_1^d) \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{13} + \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4} \approx 1,7220838060$$

Donc, la circonférence d'un cercle est exponentielle plutôt que linéaire !
Déjà pour $a_{23} = 1\,509\,452$.

Dans quelle géométrie sommes-nous ?

Dans quelle géométrie sommes-nous ?

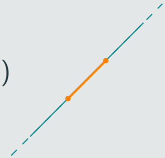
Euclide, les quatre



Dans quelle géométrie sommes-nous ?

Euclide, les quatre

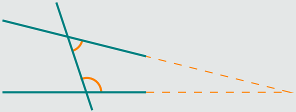
1) 

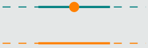
2) 

3) 

4) 

Le cinquième, en deux versions

i) 

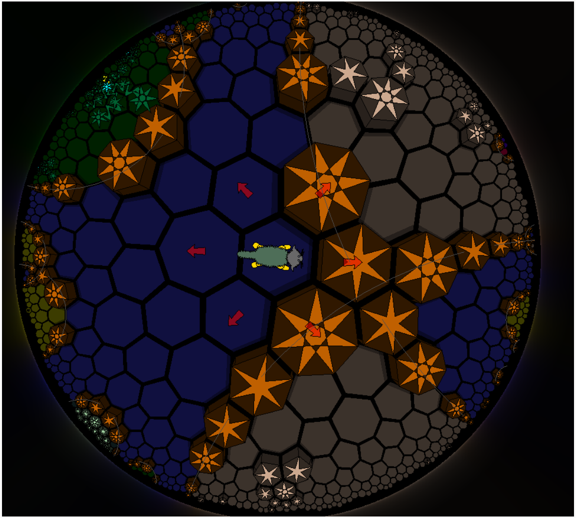
ii) 

Allons voir dans le jeu

Le cinquième, où il est, le cinquième ?

Beaucoup de droites parallèles qui s'intersectent

Le cinquième, où il est, le cinquième ?



Un regard plus près

En quoi est-ce si choquant ?

Un brin d’histoire

Euclide

Euclide par Jusepe de Ribera

- Manuel depuis tout le temps
- Dans le langage populaire
- La géométrie
- Association au divin
- Kant et l'idée de la connaissance *a priori*

Problème du cinquième axiome

Depuis deux millénaires, des gens se cassent la tête à tenter de montrer qu'il découle des autres, ou de prouver par l'absurde qu'il est nécessaire.

Dante, 1321 la Divine comédie, le Paradis chant XIII 95-102

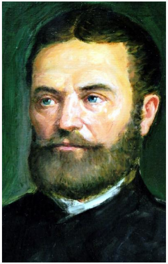
Je n'ai pas parlé en sorte que tu ne puisses
voir qu'il fut roi, et qu'il demanda la sagesse
afin d'être un roi suffisant ;
non pour savoir quel est le nombre
des moteurs des cieux, ou si du nécessaire
avec du contingent peut faire du nécessaire ;
non *si est dare primum motum esse,*
ni si du demi-cercle on peut faire
un triangle qui n'ait pas d'angles droit.

Gauss

Karl Friedriech Gauss
(1777-1855)

- Prince des mathématiques
- Astronome, géomètre, arpenteur
- Correspondant assidu
- Discute de la géométrie dans une lettre de 1824 à Taurinus
- « Ami » de tout le monde
- *pauca sed matura*

Les Bolyai



Farkas et János Bolyai
(1775–1856) (1802-1860)

- Obsédés par l'axiome des parallèles de père en fils
- Mathématiciens hongrois
- János laisse 20 000 pages de travaux codés, il publie un seul annexe sur le sujet en 1831.
- Père est ami de Gauss, fils un peu moins.
- Fils considéré comme un génie par Gauss

Lobachevski

Nikolaï Ivanovitch Lobachevski(1792–1856)

- Élève prodige
- Rapidement professeur au Kazan
- Ses travaux sur la géométrie ne sont pas très connu de son vivant
- Chaudement recommandé par Gauss

Extrait de Bolyai

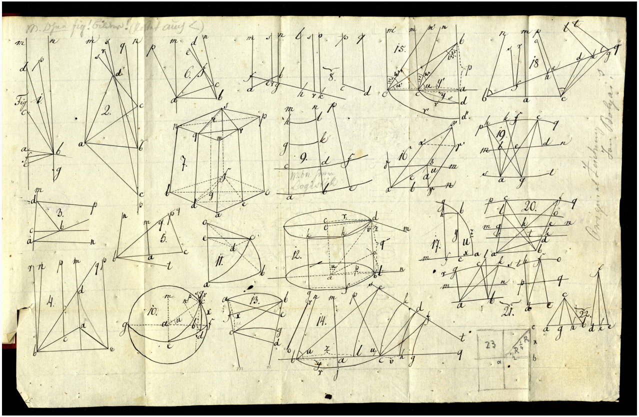


Table des figures, J. et F. Bolyai (1832) `http://real-eod.mtak.hu/2922/`

Riemann – Beltrami – Klein

Bernhard Riemann (1826–66)

- Formalise
- Surfaces de Riemann
- Aspect analytique
- Poursuite de Gauss
- Courbure

Eugenio Beltrami (1835–1900)

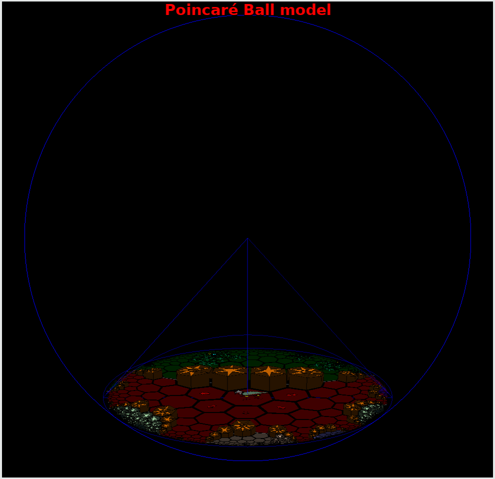
- Poursuit le travail de Riemann
- Pseudosphère,
- Symétrie des géométries non-euclidienne et euclidienne
- Modélise

Felix Klein (1849–1925)

- Programme d'Erlangen
- Géométrie par les groupes
- Acceptation
- Redécouverte de Beltrami

Disque de Poincaré

Modèle conforme : préserve les angles, mais les droites ne sont pas droites



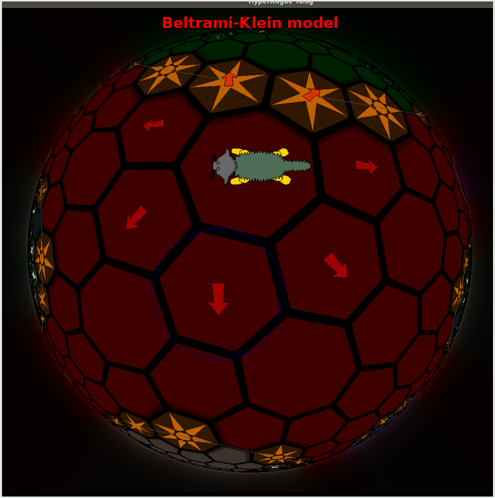
Modèles possibles

Demi-plan de Poincaré

Modèles possibles

Beltrami–Klein

Préserve les droites, mais pas les angles



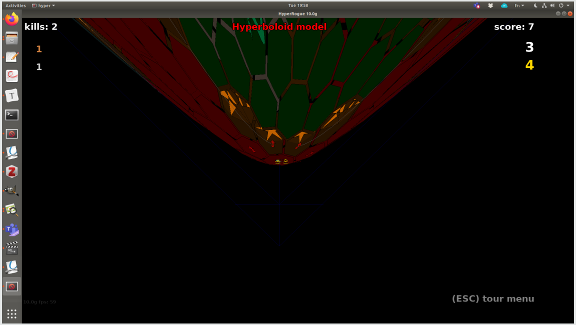
Modèles possibles

Gans (1966)

Utilise le plan et les hyperboles

Modèle utilisé internement par le jeu

Minkowski



Un hyperboloïde pavé, très clair

Modèle utilisé internement par le jeu

Minkowski autrement

Il est plus facile de projeter sur un disque ayant vu ça ! La surface en question est définie comme

$$M = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \right\}$$

On obtient Beltrami–Klein en le regardant à $p = 0$; Poincaré en le regardant à $p = -1$ et Gans en prenant la limite $p \to -\infty$.

Impacts

Le drame d'Ivan Karamazov

***Les frères Karamazov* (1880) Fiodor Mikhaïlovitch Dostoïevsky**

Il faut noter pourtant que si Dieu existe, s'il a créé vraiment la terre, il l'a faite, comme on sait, d'après la géométrie d'Euclide, et n'a donné à l'esprit humain que la notion des trois dimensions de l'espace. Cependant, il s'est trouvé, il se trouve encore des géomètres et des philosophes, même éminents, pour douter que tout l'univers et même tous les mondes aient été créés seulement suivant les principes d'Euclide. Ils osent même supposer que deux parallèles, qui suivant les lois d'Euclide ne peuvent jamais se rencontrer sur la terre, peuvent se rencontrer quelque part, dans l'infini. J'ai décidé, étant incapable de comprendre même cela, de ne pas chercher à comprendre Dieu.

***The call of Cthulhu* (1928) Howard Phillips Lovecraft**

Without knowing what futurism is like, Johansen achieved something very close to it when he spoke of the city ; for instead of describing any definite structure or building, he dwells only on broad impressions of vast angles and stone surfaces – *surfaces too great to belong to any thing right or proper for this earth*, and impious with horrible images and hieroglyphs. I mention his talk about angles because it suggests something Wilcox had told me of his awful dreams. He had said that the geometry of the dream-place he saw was abnormal, *non-Euclidean, and loathsomely redolent of spheres and dimensions apart from ours*. Now an unlettered seaman felt the same thing whilst gazing at the terrible reality.

Le futur d'Aldous Huxley

Brave New World (1932) Aldous Leonard Huxley

Lenina looked down through the window in the floor between her feet. They were flying over the six kilometre zone of park-land that separated Central London from its first ring of satellite suburbs. The green was maggoty with foreshortened life. Forests of Centrifugal Bumble-puppy towers gleamed between the trees. Near Shepherd's Bush two thousand Beta-Minus mixed doubles were playing *Riemann-surface tennis*.

Technologie à la rescousse

Problème

Ma mère n'est toujours pas convaincue, et les modèles qu'on a déforment chaque fois quelque chose.

L’art à la rescousse

Crochet

Entre en jeu Daina Taimina

Daina Taimina

Crochet

Un article qui fait sensation

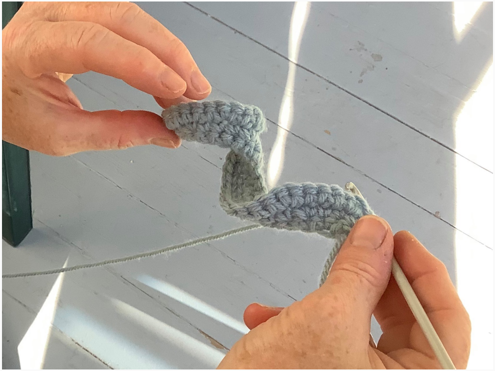
David W. Henderson and Daina Taimina, 2001, *Crocheting the Hyperbolic Plane*. The Mathematical Intelligencer Vol 23 N. 2 pp. 17–28.

Modèle isométrique

Patron (algorithme) de crochet hyperbolique N

1. Commencer un rang de P mailles ;
2. Faire un deuxième rang
3. Débuter avec un double (deux fois dans le même trou)
4. Pour les N prochaines mailles faire un simple
5. Pour la $N+1$ faire un double
6. Au bout, faire une maille de plus et passer au rang suivant.

Crochet, évolution



Un départ

Crochet, évolution

Deuxième test

Crochet, évolution

Essais

Crochet, évolution

Les premières lignes

Crochet, évolution

Sont-elles assez droites ?

Crochet, évolution

Produit final

Crochet, évolution

Une droite

Crochet, évolution

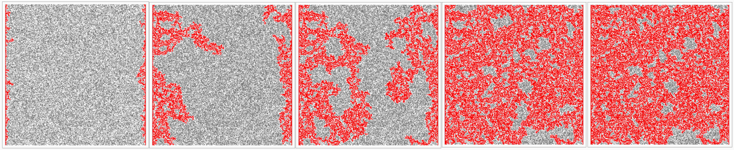
Une autre droite

Applications et lieux d’impact

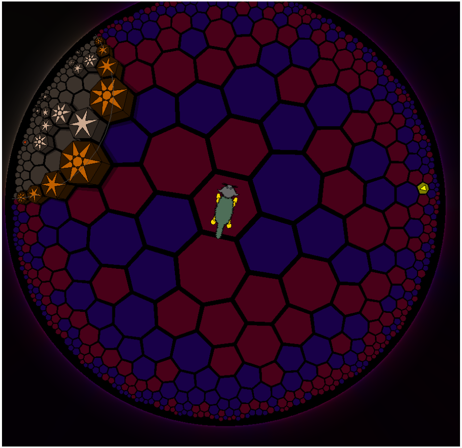
Un hypercafé avec ça ?

Percolation

Sur une grille on met une couleur avec probabilité p et le problème est de savoir pour quel p_c critique on peut toujours traverser la grille en restant sur la même couleur.

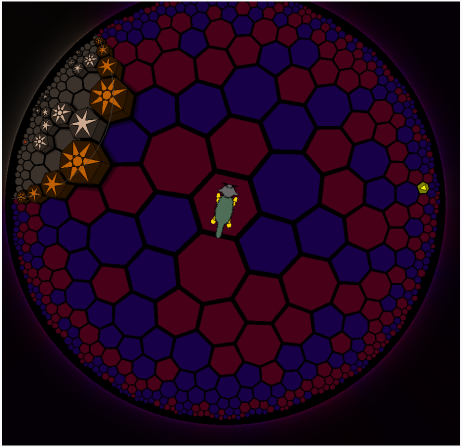


Un hypercafé avec ça ?



Ça percole

Un hypercafé avec ça ?



Résultat Hutchcroft (2019) Benjamini–Schramm (1996)

Le monde hyperbolique a une phase critique $[p_c, p_u]$ où p_u est la probabilité que la façon de traverser soit unique.

Relativité générale

Einstein réussit à formaliser mathématiquement son idée physique à l'aide de la géométrie riemannienne (1913 pour Einstein–Grossmann et 1915 pour Einstein).

La géométrie gagne ses lettres de noblesse : n'en déplaise à Ivan Karamazov, le monde est non-euclidien !

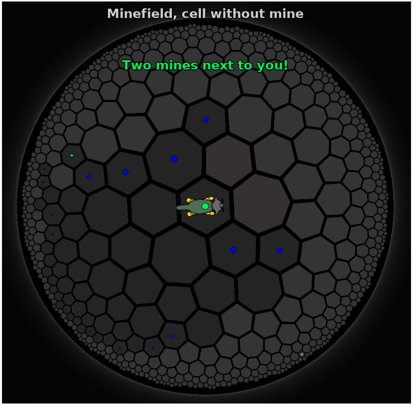
Démineur

Jeu en théorie des graphes

Étant donné un placement de chiffres, est-il possible de placer *n* mines pour les respecter ?

Défaite par un essai

Démineur hyperbolique



Démineur hyperbolique

Kopczyński 2020 (prépublication)

Il existe un algorithme polynomial pour résoudre la version hyperbolique.

Partager

Avant de terminer, un défi : trouver quelqu'un à qui parler et prenez un moment pour expliquer la géométrie hyperbolique et ses merveilles.

Les modèles et ces slides sont accessibles au `https://alexisl-r.github.io/popularization/hyperbolique/`

Questions ?

Références i

Benjamini, I., and Schramm, O.
Percolation Beyond $\mathbb{Z}^d$, Many Questions And a Few Answers.
Electronic Communications in Probability 1 (1996), 71–82.
Publisher : The Institute of Mathematical Statistics and the Bernoulli Society.

Bolyai, J.
Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens : a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem ; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.
Coll. Ref., 1832.

HENDERSON, D. W., AND TAIMINA, D.
Crocheting the hyperbolic plane.
The Mathematical Intelligencer 23, 2 (Mar. 2001), 17–28.

HUTCHCROFT, T.
Percolation on Hyperbolic Graphs.
Geometric and Functional Analysis 29, 3 (June 2019), 766–810.

JENKOVSZKY, L.
From Euclid to BGL.
Ukrainian Journal of Physics 64, 11 (2019), 977.
arXiv : 1912.01384.

KAYE, R.
Minesweeper is NP-complete.
The Mathematical Intelligencer 22, 2 (Mar. 2000), 9–15.

Kopczyński, E., and Celińska, D.
HyperRogue : Playing with Hyperbolic Geometry.
Bridges 2017 Conference Proceedings, 8–16.

Kopczyński, E., and Celińska-Kopczyńska, D.
Conformal Mappings of the Hyperbolic Plane to Arbitrary Shapes.
Bridges 2019 Conference proceedings, 8.

Références images i

- *Dror Bar-Natan*, par George M. Bergman / CC BY-SA
- *Soccer* Christopher Bruno - sxc.huderivative work : Sir James (talk), CC BY-SA 3.0,https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8481748
- *Euclide* par Jusepe de Ribera Wmpearl, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19118090
- *János Bolya* par Ferenc Márkos - Transferred from hu.wikipedia to Commons by Tambo., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24338736
- *Farkas Bolyai* domaine public https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=699088
- *Gauss* Encyclopaedia Britannica https://www.britannica.com/biography/Carl-Friedrich-Gauss/images-videos#/media/1/227204/1685
- *Lobachevski* Domaine public, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1982883
- *Daina Taimina* par Lt5283 - travail personnel, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14900141
- *Démineur* par Brandenads - travail personnel, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=90086042
- *Percolation* Images des mathématiques, CNRS https://images.math.cnrs.fr/IMG/jpg/percobis.jpg