Koninginnen op rare schaakborden

Wiskunde en schaak

Alexis Langlois-Rémillard

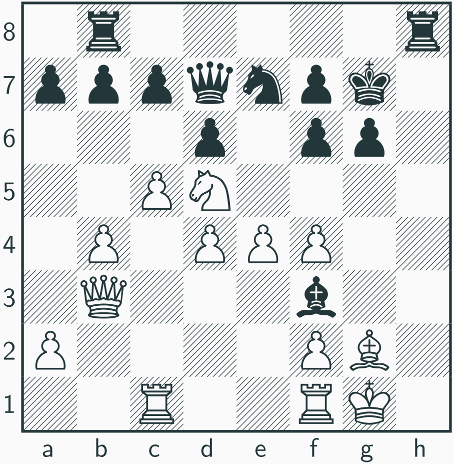
2022-11-08

GHENT UNIVERSITY

Wie ben ik ?

Alexis, Championnat international de Varennes 2018 – foto Robbie Paquin

Schaak en wiskunde

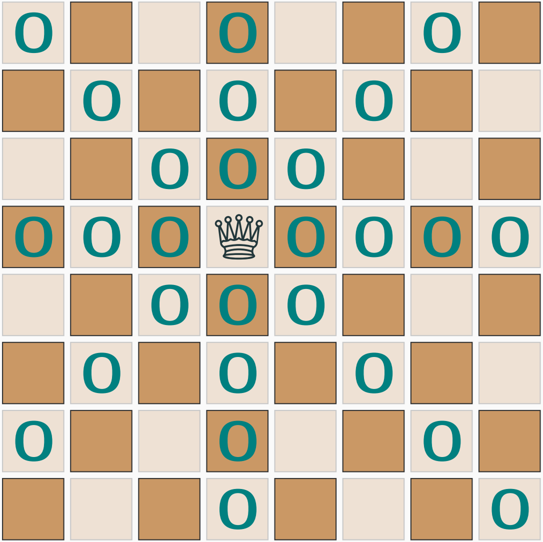


Langlois-Rémillard – GM Sambuev 2018 zwart aan de zet

Publicité (in het Frans)

De problemen

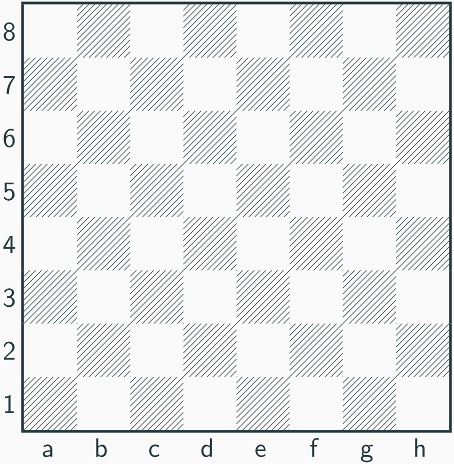
8-Koninginnenprobleem



Dames beweging

Het probleem

Hoeveel manieren zijn er om 8 dames op een 8×8 schaakbord te zetten zodat geen enkele dame een andere dame aanvalt ?



Methoden

Brute force

- Plaats alle dames
- Test
- Ja of nee

Backtracking

Methoden

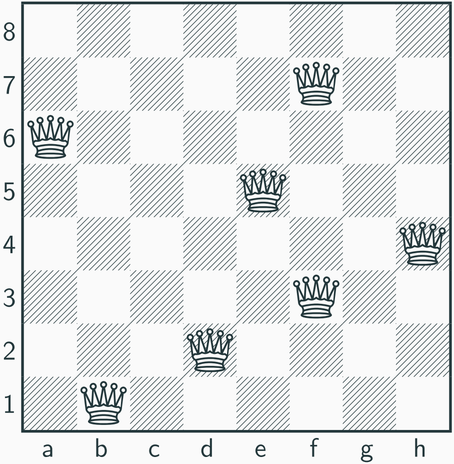
Brute force

- Plaats alle dames
- Test
- Ja of nee

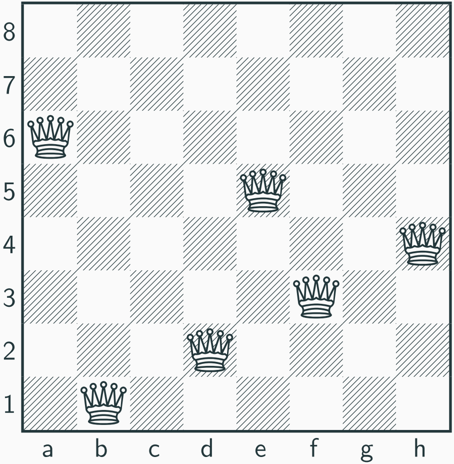
Backtracking

- Plaats dames één bij één
- Test
- Ja en doorgaan of nee en teruggaan

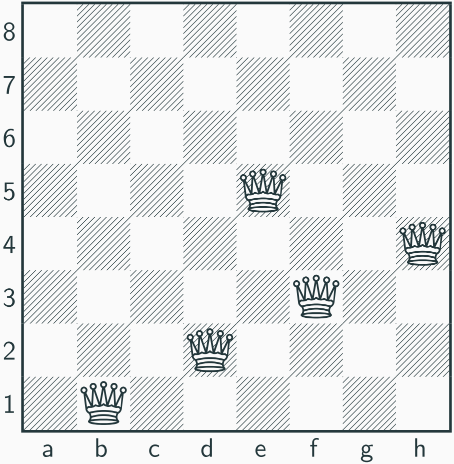
Backtracking



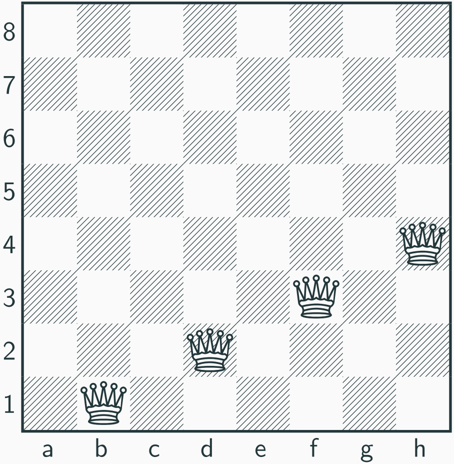
Backtracking



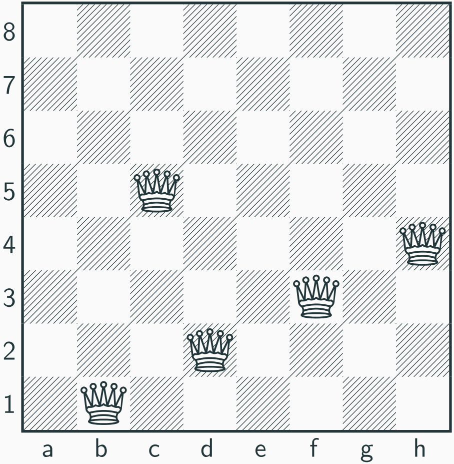
Backtracking



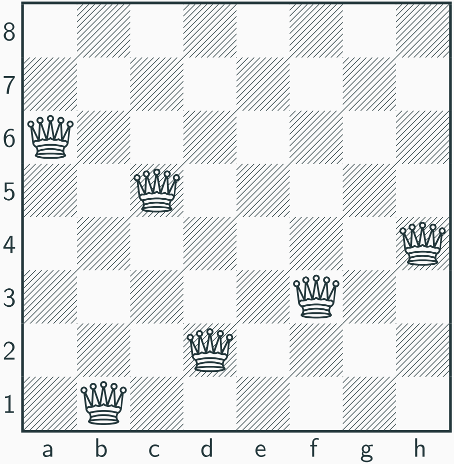
Backtracking



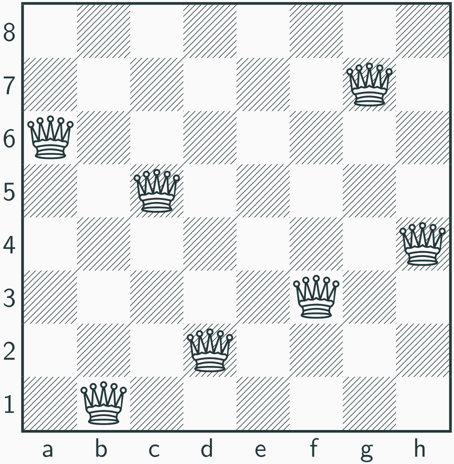
Backtracking



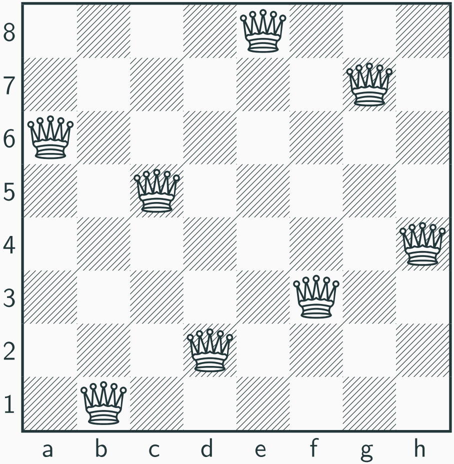
Backtracking



Backtracking

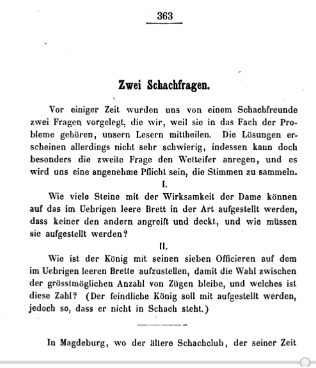


Backtracking



Geschiedenis van het probleem

Eerste versie



363

Zwei Schachfragen.

Vor einiger Zeit wurden uns von einem Schachfreunde zwei Fragen vorgelegt, die wir, weil sie in das Fach der Probleme gehören, unsern Lesern mittheilen. Die Lösungen erscheinen allerdings nicht sehr schwierig, indessen kann doch besonders die zweite Frage den Wetteifer anregen, und es wird uns eine angenehme Pflicht sein, die Stimmen zu sammeln.

I.

Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den andern angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?

II.

Wie ist der König mit seinen sieben Officieren auf dem im Uebrigen leeren Brette aufzustellen, damit die Wahl zwischen der grösstmöglichen Anzahl von Zügen bleibe, und welches ist diese Zahl? (Der feindliche König soll mit aufgestellt werden, jedoch so, dass er nicht in Schach steht.)

In Magdeburg, wo der ältere Schachclub, der seiner Zeit

Schachzeitung, September 1848

- Schachzeitung : Duits schaaktijdschrijft 1846-1988
- *Schachfreund* is Max Bezzel

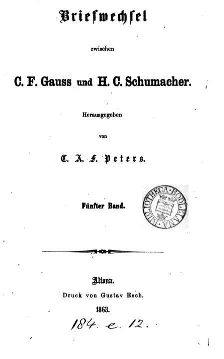
Max Bezzel – foto : Wikipedia

Gauss

Karl Friedriech Gauss
(1777-1855) – gravuur :
Britannica

- Prins van de wiskunde
- Astronoom, meetkundiger, landmeter
- IJverige correspondent
- *pauca sed matura*

- Van september tot en met oktober 1850, briefwisseling over het 8-koninginnenprobleem met Schumacher
- Gauss geeft een oplossing
- Omzichtig en niet opgelost


Briefwechsel

zwischen

C. F. Gauss und H. C. Schumacher.

Herausgegeben

von

C. A. F. Peters.

Fünfter Band.

Altona.

Druck von Gustav Esch.

1863.

Briefwisseling Gauss-Schumacher – Editie 1863

Briefwisseling

- Van september tot en met oktober 1850, briefwisseling over het 8-koninginnenprobleem met Schumacher
- Gauss geeft een oplossing
- Omzichtig en niet opgelost

Heinrich Christian Schumacher – gravuur : Wikipedia

Briefwisseling

- Van september tot en met oktober 1850, briefwisseling over het 8-koninginnenprobleem met Schumacher
- Gauss geeft een oplossing
- Omzichtig en niet opgelost
- Schumacher stierf in december 1850

Heinrich Christian Schumacher – gravuur : Wikipedia

Gauss' oplossing

Oplossing van Gauss

Brief aan Schumacher, 20 september 1850

Schwer ist es ubrigens nicht, durch ein methodisches Tatonnireu sich diese Gewissheit zu verschaffen, wenn man 1 oder ein Paar Stunden daran wenden will.

Gauss' pad

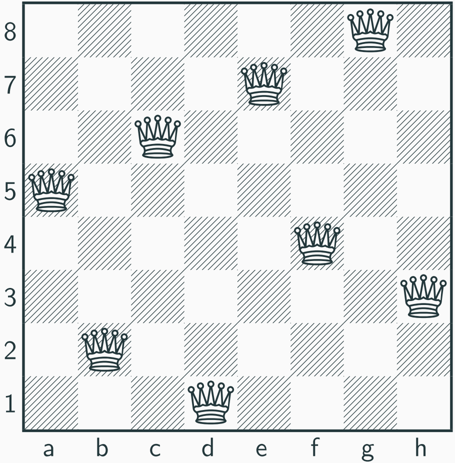
1. Één dame in elke kolom en één in elke rij

Gauss' pad

1. Één dame in elke kolom en één in elke rij
2. Permutatie van $\{1, 2, \ldots, 8\}$ (positie van Dame *i*)

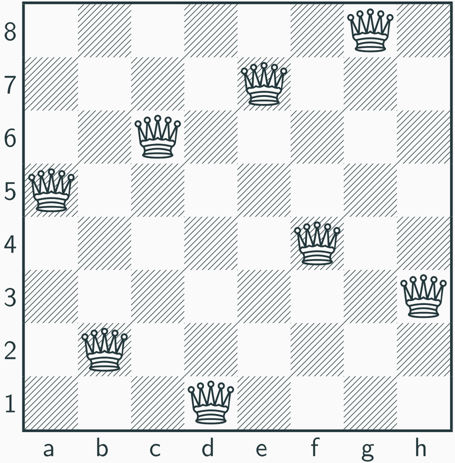
Gauss' pad

1. Één dame in elke kolom en één in elke rij
2. Permutatie van $\{1, 2, \ldots, 8\}$ (positie van Dame *i*)



Gauss' pad

1. Één dame in elke kolom en één in elke rij
2. Permutatie van $\{1, 2, \ldots, 8\}$ (positie van Dame i)



$(5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3)$

Gauss' oplossing

1. Begin met een torenoplossing (permutatie)
2. Zorgen voor diagonalen

Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)

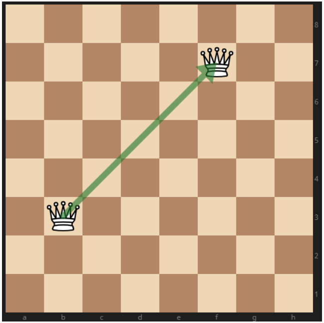
Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)

Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)
- twee dames (j, y_j) en (k, y_k) delen dezelfde diagonaal NO als

$$y_j - j = y_k - k$$

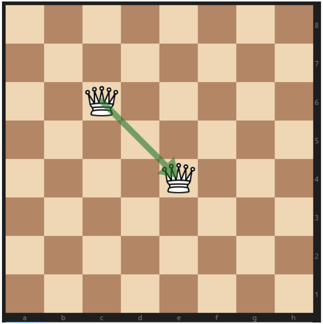


$$y = x + b$$

Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)
- twee dames (j, y_j) en (k, y_k) delen dezelfde diagonaal ZO als

$$y_j + j = y_k + k$$



$$y = -x + b$$

Diagonalenzorg

$(y_1, \ldots, y_8)$ is een oplossing als voor alle $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k - k \neq y_j - j$$

Diagonalenzorg

$(y_1, \ldots, y_8)$ is een oplossing als voor alle $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k - k \neq y_j - j$$

Bijvoorbeeld $(1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$ is een oplossing :

	1	5	8	6	3	7	2	4
+	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	7	11	10	8	13	9	12

	1	5	8	6	3	7	2	4
-	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	3	5	2	-2	-1	-5	-4

,

Diagonalenzorg

$(y_1, \ldots, y_8)$ is een oplossing als voor alle $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k - k \neq y_j - j$$

Bijvoorbeeld $(1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$ is een oplossing :

	1	5	8	6	3	7	2	4
+	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	7	11	10	8	13	9	12

	1	5	8	6	3	7	2	4
-	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	3	5	2	-2	-1	-5	-4

,

Maar $(1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8)$ is er geen omdat $8 + 1 = 1 + 8$.

En...

$$S1 = (1, 7, 4, 6, 8, 2, 5, 3) \qquad S2 = (1, 7, 5, 8, 2, 4, 6, 3) \qquad S3 = (2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5)$$
$$S4 = (4, 1, 5, 8, 2, 7, 3, 6) \qquad S4 = (5, 1, 8, 4, 2, 7, 3, 6) \qquad S6 = (3, 1, 7, 5, 8, 2, 4, 6)$$
$$S7 = (5, 1, 4, 6, 8, 2, 7, 3) \qquad S8 = (7, 1, 3, 8, 6, 4, 2, 5) \qquad S9 = (5, 1, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$$
$$S10 = (5, 7, 1, 4, 2, 8, 6, 3) \qquad S11 = (6, 3, 1, 8, 4, 2, 7, 5) \qquad S12 = (5, 3, 1, 7, 2, 8, 6, 4)$$

En voor groter schaakborden ?

Het is gemakkelijk één solutie te vinden, **Emil Pauls** in 1873 heeft één oplossing gegeven voor elke n.

Om alle soluties te vinden heb je onmenselijke kracht nodig. Na $n = 27$ weten we niet meer hoeveel zijn er.

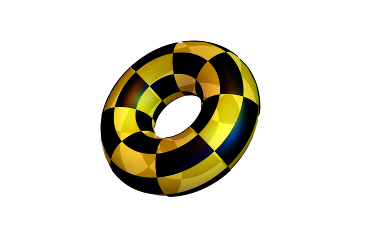
Veralgemening met een kopje koffie

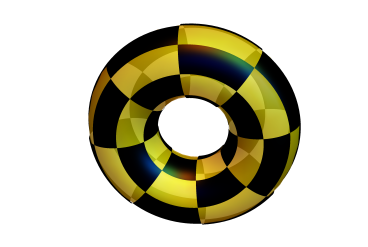
Pólya

Georg Pólya – Wikipedia

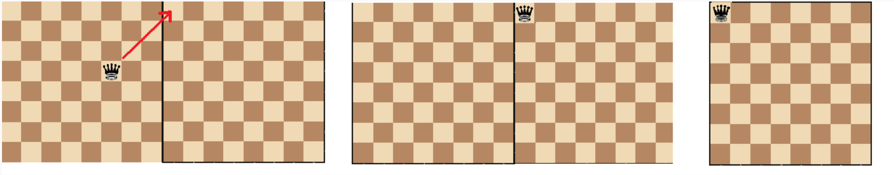
- Hongaarse, Zwitse en Amerikaanse wiskundige (1887-1985)
- *How to Solve It ?*
- Algebra, combinatoriek, analyse, onderwijs, etc.
- Interesseert zich voor het probleem van n dames in 1918 met een kleine aanpassing

Mooie kopjes

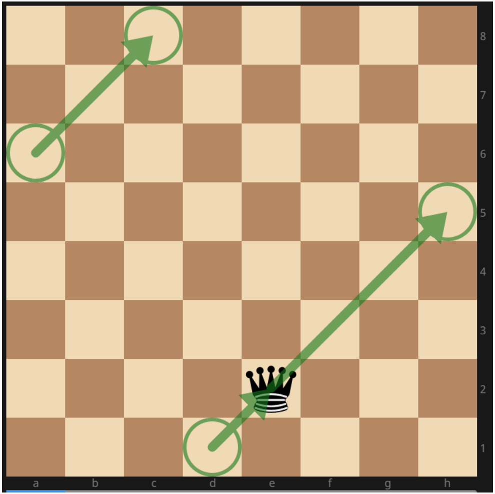




Dames op tori



Dames op tori



How to Solve It ?

Hoeveel oplossingen zijn er voor het 8 koninginnenprobleem op een torus ?

Antwoord...

8,1,7	8,2,6	8,3,5	8,4,4	8,5,3	8,6,2	8,7,1	8,8,8
7,1,8	7,2,7	7,3,6	7,4,5	7,5,4	7,6,3	7,7,2	7,8,1
6,1,1	6,2,8	6,3,7	6,4,6	6,5,5	6,6,4	6,7,3	6,8,2
5,1,2	5,2,1	5,3,8	5,4,7	5,5,6	5,6,5	5,7,4	5,8,3
4,1,3	4,2,2	4,3,1	4,4,8	4,5,7	4,6,6	4,7,5	4,8,4
3,1,4	3,2,3	3,3,2	3,4,1	3,5,8	3,6,7	3,7,6	3,8,5
2,1,5	2,2,4	2,3,3	2,4,2	2,5,1	2,6,8	2,7,7	2,8,6
1,1,6	1,2,5	1,3,4	1,4,3	1,5,2	1,6,1	1,7,8	1,8,7

Theorem van Pólya

Probleem des n dames op een torus

Er is een oplossing als en slechts als n is $n = 6k + 1$ of $n = 6k + 5$.

Andere problemen, andere rare borden

Dominerende dames

$D(n)$ is het minimale aantal dames nodig om alle velden op een $n \times n$ schaakbord te beschermen.

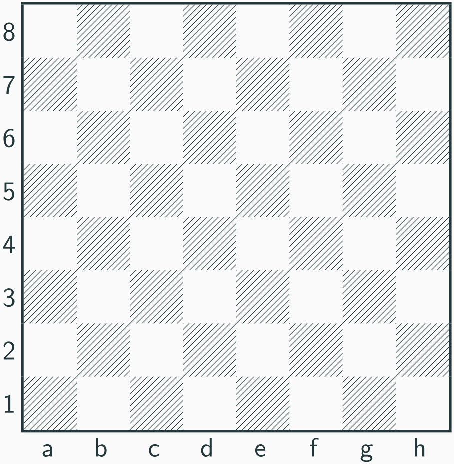
$d(n)$ is hetzelfde met de extra conditie dat de dames zichzelf niet kunnen aanvallen.

Pas op !

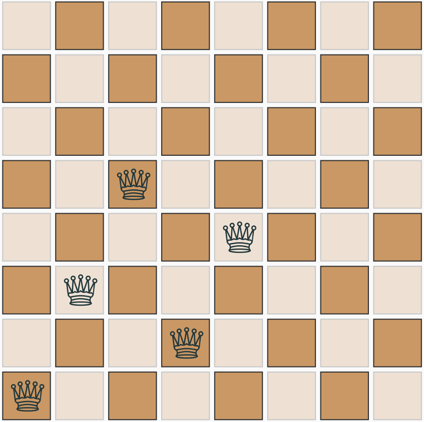
Ze kunnen elkaar aanvallen nu !

Los het op !

Wat is het minimale aantal dames nodig om een bord te beschermen ?



Mijn oplossing



Probleem, eerste versie

APPENDICE.

Un de nos anciens amis, Mr de R*** a bien voulu enrichir notre ouvrage d'un mémoire sur le *problème des cinq dames*, dont nous joignons ici la traduction*). On a vu, dans notre premier volume, pag. 122—135, qu'il y a, en tout, 92 manières différentes de placer huit dames sur l'échiquier, de façon qu'elles en attaquent toutes les cases, hormis celles qu'elles remplissent elles-mêmes. C'est là, évidemment, le *maximum* de dames satisfaisant à la condition décrite. Or divers amateurs d'échecs ont signalé, depuis, l'existence d'un *minimum* correspondant. Car ils ont remarqué que *cinq* dames suffisaient pour tenir en échec les 59 cases restantes de l'échiquier, tout en l'occupant de manière à ne point s'entre-attaquer. Mais cette remarque n'ayant été appuyée que de deux ou trois exemples particuliers, il restait à découvrir et à discuter le total des solutions du problème ainsi modifié. C'est ce qu'a fait notre savant ami, dont le mémoire indique, en outre, l'application des mêmes idées aux échiquiers carrés moindres que celui de 64 cases. Le problème en question, quoique mathématique de sa nature, est, d'ailleurs, à tel point rebelle au calcul, que les méthodes connues ne fournissent même pas le moyen de *l'énoncer analytiquement*. Cette circonstance rehaussera, sans doute, aux yeux des géomètres, l'intérêt des résultats auxquels Mr de R*** est parvenu par des essais systématiques très-pénibles.

*) Du consentement de l'auteur, nous y avons donné plus de développement aux considérations qui se rattachent à la géométrie de situation. Nous n'avons eu, en cela, que le but de relier cet appendice aux passages des deux premiers volumes où se trouvent exposés les principes généraux des considérations dont il s'agit.

Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs Vol 3, 1863

C. F. de Jaenisch – gravure : Wikipedia

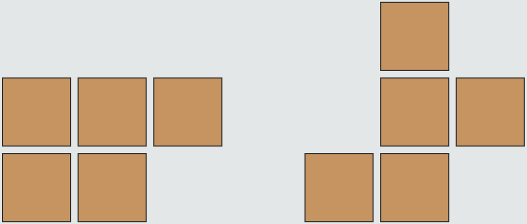
OEIS

Hoeveel heb je nodig voor een grotere bord ?

AO75324

Polyominos en kunstgalerieën

Polyominos



Meespelen

Een spel

Doel

Vind een dominatie met het minste dames.

Pour tester

`https://gotm.io/polyomino/polyomino`

ou

`https://www.erikaroldan.net/queensrooksdomination`

Kijken naar het spel

Vraag

Hoeveel dames hebben we nodig ?

Eerste antwoord

Soms is maar één nodig en $\lfloor n/2 \rfloor$ zijn altijd genoeg

Vraag

Hoeveel dames hebben we nodig ?

Eerste antwoord

Soms is maar één nodig en $\lfloor n/2 \rfloor$ zijn altijd genoeg

Bewijs

Kijk hier : 

Kijken naar het spel

Vraag

Hoeveel dames hebben we nodig ?

Eerste antwoord

Soms is maar één nodig en $\lfloor n/2 \rfloor$ zijn altijd genoeg

Bewijs

Kijk hier : 

Om te bewijzen dat $\lfloor n/2 \rfloor$ altijd genoeg zijn, betegelen we de polyomino met twee kleuren.

Betere grenzen

Oefening (Stelling van Alpert–Roldán 2021)

Bewijs dat $\lfloor n/3 \rfloor$ dames altijd genoeg en soms nodig zijn om een polyomino te beschermen.

Betere grenzen

Oefening (Stelling van Alpert–Roldán 2021)

Bewijs dat $\lfloor n/3 \rfloor$ dames altijd genoeg en soms nodig zijn om een polyomino te beschermen.

Antwoord

Te vinden in Accromαth ! https ://accromath.uqam.ca/

Conclusie

Onderzoek

- Complexiteit van de problemen
- Grafen
- Probabiliteit (voor willekeurige polyomino's, hoeveel heb je nodig ?)
- Interactie tussen spel en onderzoek

Vragen ?

Quelle complexité ?

Sur un échiquier : **P** (Problème des n dames)

Quelle complexité ?

Sur un échiquier : **P** (Problème des n dames)

Théorème L-R–Müßig–Roldán 2022

Le problème de domination maximale des dames indépendantes sur des d-polycubes pour $d \geq 2$ est

Quelle complexité ?

Sur un échiquier : **P** (Problème des n dames)

Théorème L-R–Müßig–Roldán 2022

Le problème de domination maximale des dames indépendantes sur des d-polycubes pour $d \geq 2$ est **NP**-complet.

Première étape :

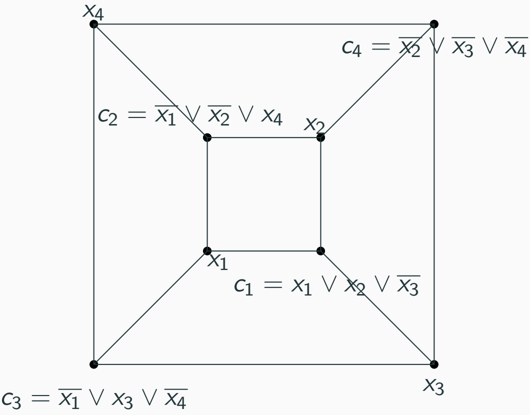
Est-ce dans NP

Vérifier qu'une suggestion domine et est indépendante se fait en temps polynomial, c'est donc dans **NP**.

Trouver notre problème NP favori

$\mathrm{P3SAT}_{\underline{\overline{3}}}$ Cerioli *et al.* [1]

Le problème de 3 SATISFAISABILITÉ PLANAIRE AVEC EXACTEMENT TROIS OCCURRENCES PAR VARIABLE ($\mathrm{P3SAT}_{\underline{\overline{3}}}$) est **NP**-complet



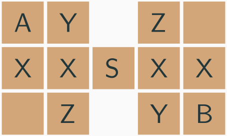
Plan de match

Il faut encoder $\mathrm{P3SAT}_{\underline{3}}$avec des polyominos. Précisément il faut :

1. Des variables avec valeur Vraie (V) ou Fausse (F)
2. Une façon de communiquer la valeur
3. Des clauses

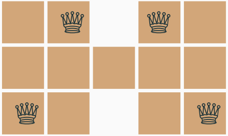
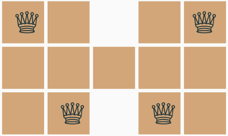
On va nommer nos polyominos, des **gadgets**.

Gadget de variable

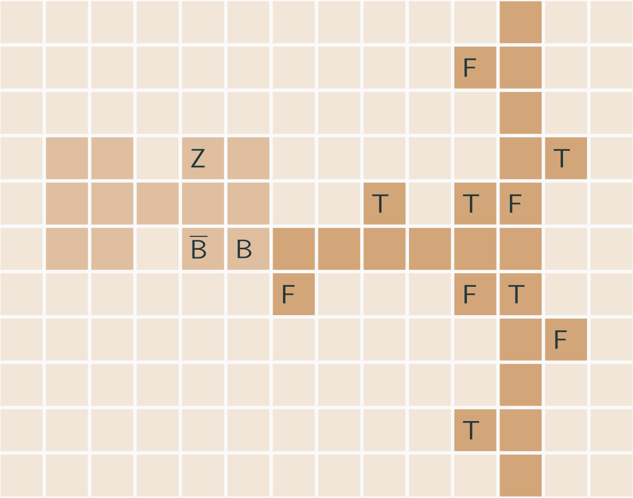


Lemme

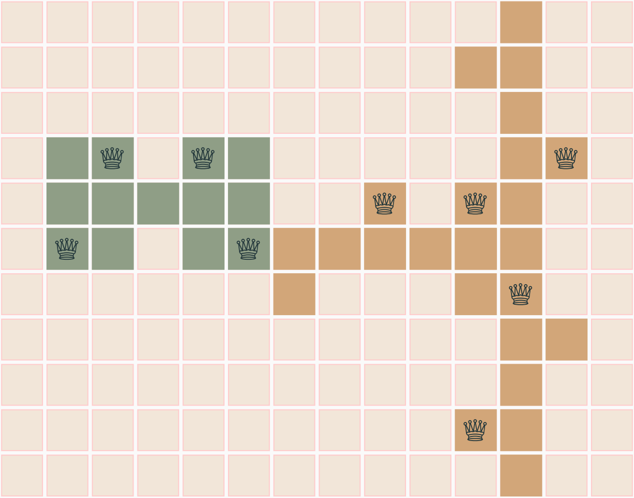
La domination maximale requiert quatre dames et il y a deux façons de la faire.

$P(x|^{x}_{V}) =$  , $P(x|^{x}_{F}) =$  .

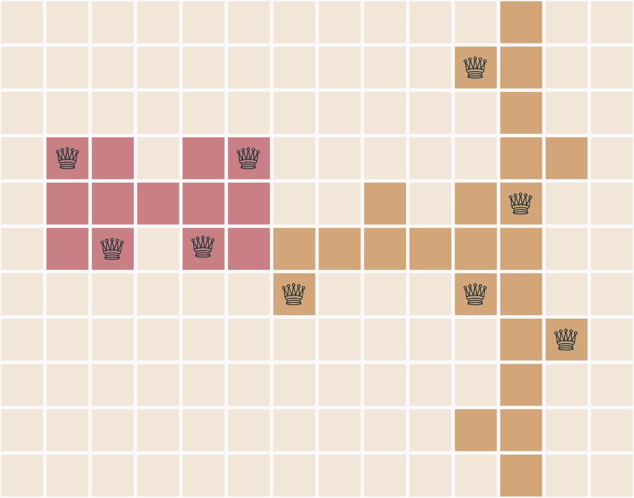
Gadget de communication



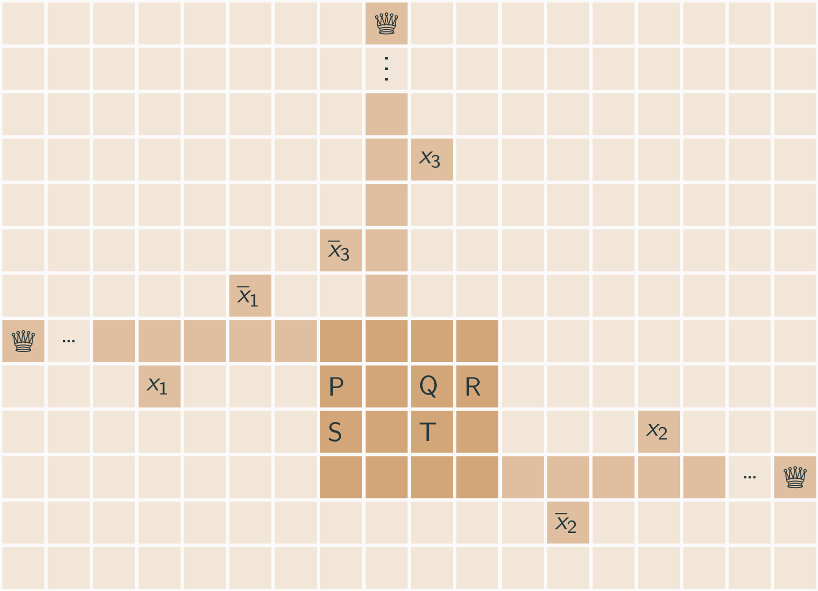
Gadget de communication : Vrai



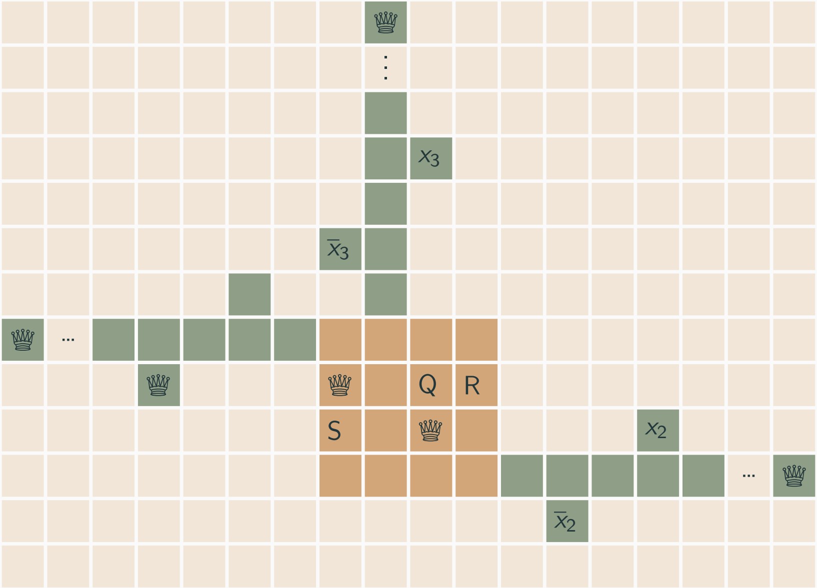
Gadget de communication : Faux



Gadget de clause



Gadget de clause : vrai



Gadget clause : faux