La domination, une histoire d’échecs

Alexis Langlois-Rémillard

2022-09-28

Université de Gand

Idée de ce qui vous attend

- Étudier la domination
- Complexité algorithmique
- Application à un jeu

Un brin de moi

Alexis au Championnat international de Varennes 2018 – photo Robbie Paquin

Une de mes lignes du temps

- 2000 apprentissages des échecs
- 2014 Début bac en maths (UdeM)
- 2017 Début maîtrise en maths (UdeM)
- 2018 Clubmath sur le problème des 8 dames
- 2019 Début doc en maths (UGent)
- 2020 Covid
- 2021 Rédaction popularisation mathématique (éventuellement avec Charles Senécal)
- 2022 Publications dans Accromath

Une de mes lignes du temps

- 2000 apprentissages des échecs
- 2014 Début bac en maths (UdeM)
- 2017 Début maîtrise en maths (UdeM)
- 2018 Clubmath sur le problème des 8 dames
- 2019 Début doc en maths (UGent)
- 2020 Covid
- 2021 Rédaction popularisation mathématique (éventuellement avec Charles Senécal)
- 2022 Publications dans Accromath
- Août 2022 Séjour de recherche à Leipzig avec Érika Roldán et Christoph Müßig

Publicité


Accromαth
Volume 17 • hiver-printemps 2022
Huit dames et un
échiquier
Autres articles
• Le paradoxe de Saint-Pétersbourg
• Paver l'espace avec des cubes
• Le système de notation Elo
• Comparaison d'aires
1. La règle et le compas
Paradoxes
Encore
une histoire
de chapeaux


Accromαth
Des
dames
sur d'étranges échiquiers
Autres articles
• L'utilisation d'indices
pour combiner des informations
• Y a-t-il une relation de cause à effet?
La science statistique de l'inférence causale
• Comparaison d'aires: 2. La méthode
d'exhaustion et la méthode du levier
• (Ré)apprendre à multiplier avec
la méthode de Karatsuba
Paradoxes
Le
déménagement
miraculeux

Maths et échecs

G.H. Hardy, *A Mathematician’s Apology*

A chess problem is genuine mathematics, but it is in some way ”trivial” mathematics.

Maths et échecs

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*

A chess problem is genuine mathematics, but it is in some way "trivial" mathematics.

triviales ?

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*

A chess problem is genuine mathematics, but it is in some way "trivial" mathematics.

triviales ?

Fraenkel et Lichtenstein 1981

Computing a perfect strategy for $n \times n$ chess requires time exponential in n

James A. Storer 1983 *On the complexity of chess*, Theorem 2

Given a position of generalized chess [with generalised 50-moves rules], it is PSPACE-complete to determine if White (or Black) has a winning strategy

Trop compliqué

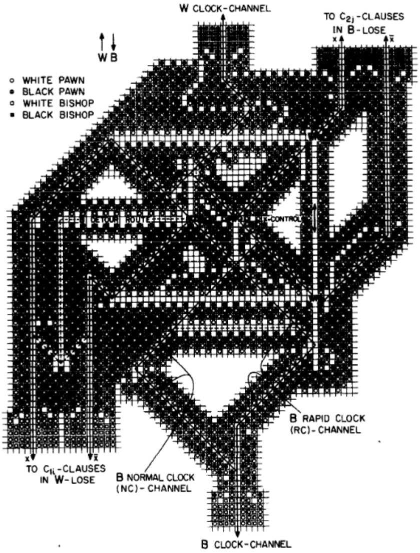
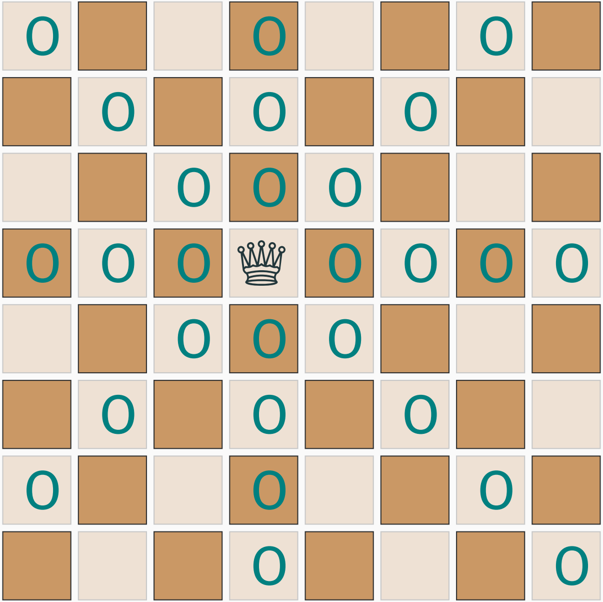


FIG. 1. White Boolean controller.

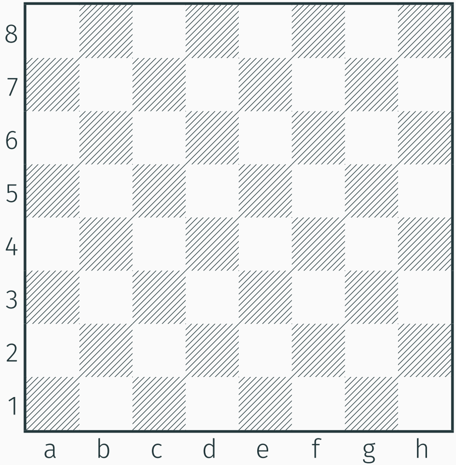
Un problème pour nous motiver

Le mouvement des dames



Résolvez!

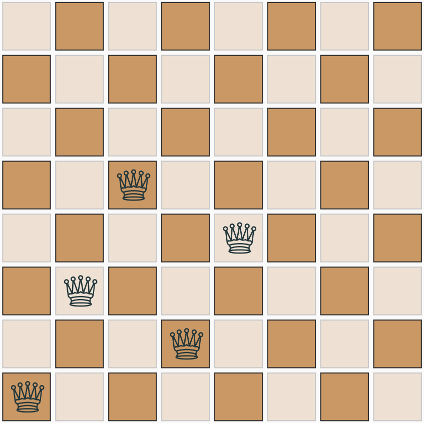
Quel est le nombre minimal de dames requis pour garder un échiquier ?



Solution

Quelqu’un aimerait montrer sa solution ?

Ma solution

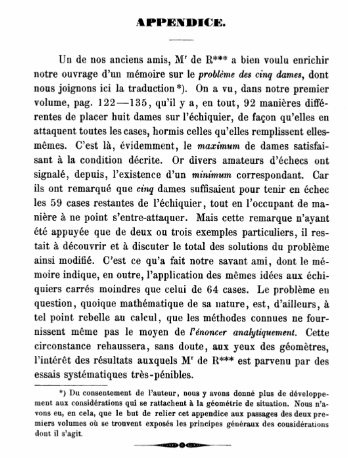


Argument d'autorité

C'est une des solutions optimales, mais, comment le prouver ?

Un brin d’histoire

Problème, version originale


APPENDICE.

Un de nos anciens amis, Mr de R*** a bien voulu enrichir notre ouvrage d'un mémoire sur le *problème des cinq dames*, dont nous joignons ici la traduction *). On a vu, dans notre premier volume, pag. 122—135, qu'il y a, en tout, 92 manières différentes de placer huit dames sur l'échiquier, de façon qu'elles en attaquent toutes les cases, hormis celles qu'elles remplissent elles-mêmes. C'est là, évidemment, le *maximum* de dames satisfaisant à la condition décrite. Or divers amateurs d'échecs ont signalé, depuis, l'existence d'un *minimum* correspondant. Car ils ont remarqué que *cinq* dames suffisaient pour tenir en échec les 59 cases restantes de l'échiquier, tout en l'occupant de manière à ne point s'entre-attaquer. Mais cette remarque n'ayant été appuyée que de deux ou trois exemples particuliers, il restait à découvrir et à discuter le total des solutions du problème ainsi modifié. C'est ce qu'a fait notre savant ami, dont le mémoire indique, en outre, l'application des mêmes idées aux échiquiers carrés moindres que celui de 64 cases. Le problème en question, quoique mathématique de sa nature, est, d'ailleurs, à tel point rebelle au calcul, que les méthodes connues ne fournissent même pas le moyen de *l'énoncer analytiquement*. Cette circonstance rehaussera, sans doute, aux yeux des géomètres, l'intérêt des résultats auxquels Mr de R*** est parvenu par des essais systématiques très-pénibles.

*) Du consentement de l'auteur, nous y avons donné plus de développement aux considérations qui se rattachent à la géométrie de situation. Nous n'avons eu, en cela, que le but de relier cet appendice aux passages des deux premiers volumes où se trouvent exposés les principes généraux des considérations dont il s'agit.

Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs Vol 3, 1863

- *Carl Ferdinand de Jaenisch*, joueur d'échecs et professeur russe

C. F. de Jaenisch – gravure : Wikipedia

La domination

- Un échiquier : un graphe (Sommets + Arêtes)
- Les case sont les sommets
- Deux points sont liés si une une pièce sur une des cases attaque l'autre.

Domination

Soit un graphe $G = (S, A)$. Un ensemble de sommets $T \subset S$ domine G si pour tout sommet $s \in S - T$ il y a un sommet $t \in T$ relié à s.

Le problème de domination version graphes

Formulation en graphe

Trouver le plus petit ensemble dominant d'un graphe.

Coclique

Des points d'un graphe G forment une **coclique** s'ils n'ont aucune arête entre eux.

Problème de domination indépendante des dames

Trouver la plus petite coclique dominante d'un graphe.

Retour à nos dames

Résolution

De Jaenisch présente une preuve pour l'échiquier normal 8×8 : au cas-par-cas.

Résolution

De Jaenisch présente une preuve pour l'échiquier normal 8×8 : au cas-par-cas.

Généralisation

Combien de dames faut-il pour garder un échiquier $n \times n$?

Résolution

De Jaenisch présente une preuve pour l'échiquier normal 8×8 : au cas-par-cas.

Généralisation

Combien de dames faut-il pour garder un échiquier $n \times n$?

Réponse (peu satisfaisante)

On ne le sait en général pas.

OEIS

Voici ce que l'OEIS nous dit :

AO75324

Une autre question

Question

Est-ce que la suite est croissante ?

Une autre question

Question

Est-ce que la suite est croissante ?

Conjecture, Hedetniemi 1994

Le nombre de dames nécessaire pour garder un échiquier $n \times n$ est au moins aussi grand que celui nécessaire pour garder un échiquier $n - 1 \times n - 1$.

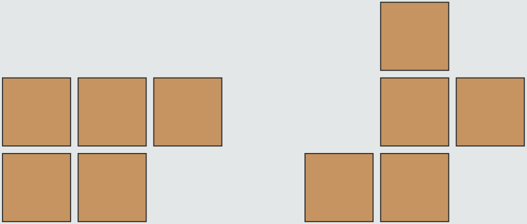
Pas si facile

Exercice : essayer sur des échiquiers rectangulaires 8×11 et 9×11.

Trop difficile

Généralisons !

Polyominos



Jouer pour comprendre

Un jeu

But du jeu

Trouver une façon de dominer le polyomino avec le moins de dames possible.

Pour tester

`https://gotm.io/polyomino/polyomino`

ou

`https://www.erikaroldan.net/queensrooksdomination`

Analyse du jeu

Question

Combien de dames faut-il ?

Première réponse

Il en faut toujours au moins et parfois seulement une, et $\lfloor n/2 \rfloor$ sont toujours suffisantes

Analyse du jeu

Question

Combien de dames faut-il ?

Première réponse

Il en faut toujours au moins et parfois seulement une, et $\lfloor n/2 \rfloor$ sont toujours suffisantes

Preuve

Il en faut une pour surveiller le polyomino droit 

Analyse du jeu

Question

Combien de dames faut-il ?

Première réponse

Il en faut toujours au moins et parfois seulement une, et $\lfloor n/2 \rfloor$ sont toujours suffisantes

Preuve

Il en faut une pour surveiller le polyomino droit 

Pavons les polyominos en deux couleurs.

Meilleures bornes

Exercices (Alpert–Roldán)

Prouver que $\lfloor n/3 \rfloor$ dames sont toujours suffisantes et parfois nécessaire pour garder n'importe lequel polyomino.

Exercices (Alpert–Roldán)

Prouver que $\lfloor n/3 \rfloor$ dames sont toujours suffisantes et parfois nécessaire pour garder n'importe lequel polyomino.

Réponse

Aller lire Accromαth !

Question plus appropriée

Question

Est-il réaliste de répondre à cette question ? En d'autres mots : *quelle est la complexité du problème de domination des dames ?*

La complexité, vision algorithmique

Complexité algorithmique en temps P

Deux familles de complexité

P

- Vérifiable en temps polynomial
- Résoluble en temps polynomial

NP-complet

- Vérifiable en temps polynomial
- On peut passer d'un problème de la classe à un autre en temps polynomial

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}, \quad \mathrm{P} \supseteq ?\ \mathrm{NP}$$

Complexité algorithmique 2

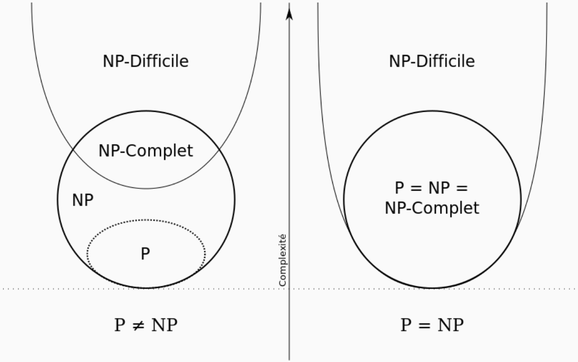


FIGURE 1 – Par Behnam Esfahbod — CC BY-SA 3.0,
`https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17524576`

Liste d'épicerie de complexité pour P ou NP

1. Trouver un algorithme polynomial pour vérifier une réponse
   1.1 Trouvé ? Le problème est dans la classe NP ; passer au point 2
   1.2 Pas trouvé ? Passer au point 3
2. Essayer de trouver un algorithme polynomial
   2.1 Trouvé ? Voilà, votre problème est P
   2.2 Pas trouvé ? Passer au point 3
3. Choisir votre problème NP-complet préféré
4. Trouver une réduction polynomiale jusqu'au problème à l'étude
   4.1 Trouvé ? Si 1.1, NP-complet ; si 1.2, NP-difficile
   4.2 Pas trouvé ? Lire sur les autres classes de complexité et espérer

Un exemple

Problème : le problème des n-dames

Placer n dames sur un échiquier $n \times n$ de sorte à ce qu'aucune en attaque une autre.

Proposition

Trouver une solution au problème des n-dames est dans **P**.

Preuve

1. Étant donné une position de dames, vérifier demande au maximum $n^2 \times n$ étapes. Donc, c'est dans **NP**.
2. Emil Pauls en 1873 donna une construction d'une solution pour tout n. Donc, c'est dans **P**.

Exemple dans NP

Théorème Alpert–Roldán 2021 (et L-R–Müßig–Roldán)

Le problème de domination des dames sur les polyominos est NP-complet.

Exemple dans NP

Théorème Alpert–Roldán 2021 (et L-R–Müßig–Roldán)

Le problème de domination des dames sur les polyominos est **NP**-complet.

Corollaire

Résoudre le problème de domination des dames sur des polyominos de façon constructive en temps polynomial (et avoir raison) vaut 1 000 000$.

Exemple dans NP

Théorème Alpert–Roldán 2021 (et L-R–Müßig–Roldán)

Le problème de domination des dames sur les polyominos est NP-complet.

Corollaire

Résoudre le problème de domination des dames sur des polyominos de façon constructive en temps polynomial (et avoir raison) vaut 1 000 000$.

Preuve : Cela prouverait $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ et l'institut Clay fera le reste.

Un autre jeu

Un jeu

But du jeu

Trouver une façon de dominer le polyomino avec le **plus** de dames possible *sans qu'elle se menacent*.

Pour tester

`https://gotm.io/polyomino/polyomino`

ou

`https://www.erikaroldan.net/queensrooksdomination`

Quelle complexité ?

Sur un échiquier : **P** (Problème des n dames)

Quelle complexité ?

Sur un échiquier : **P** (Problème des *n* dames)

Théorème L-R–Müßig–Roldán 2022

Le problème de domination maximale des dames indépendantes sur des d-polycubes pour $d \geq 2$ est

Quelle complexité ?

Sur un échiquier : P (Problème des *n* dames)

Théorème L-R–Müßig–Roldán 2022

Le problème de domination maximale des dames indépendantes sur des d-polycubes pour $d \geq 2$ est NP-complet.

Preuve de la complexité

Première étape :

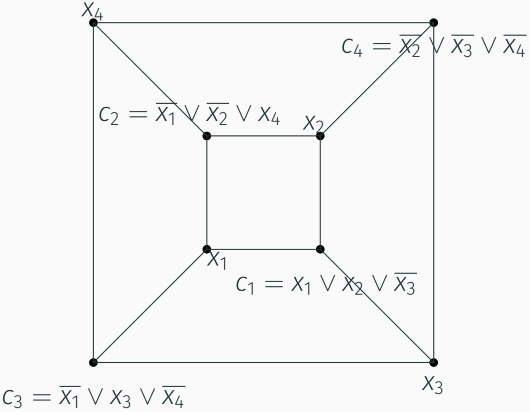
Est-ce dans NP

Vérifier qu'une suggestion domine et est indépendante se fait en temps polynomial, c'est donc dans NP.

Trouver notre problème NP favori

$\mathrm{P3SAT}_{\underline{3}}$ Cerioli *et al.* [Cerioli08]

Le problème de 3 SATISFAISABILITÉ PLANAIRE AVEC EXACTEMENT TROIS OCCURRENCES PAR VARIABLE ($\mathrm{P3SAT}_{\underline{3}}$) est NP-complet



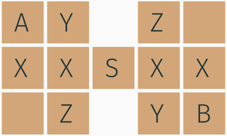
Plan de match

Il faut encoder $\mathrm{P3SAT}_{\underline{3}}$ avec des polyominos. Précisément il faut :

1. Des variables avec valeur Vraie (V) ou Fausse (F)
2. Une façon de communiquer la valeur
3. Des clauses

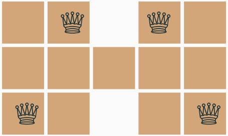
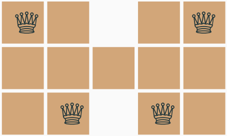
On va nommer nos polyominos, des **gadgets**.

Gadget de variable

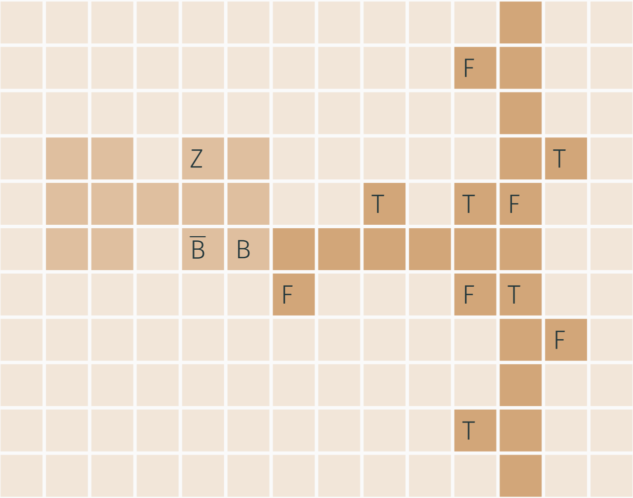


Lemme

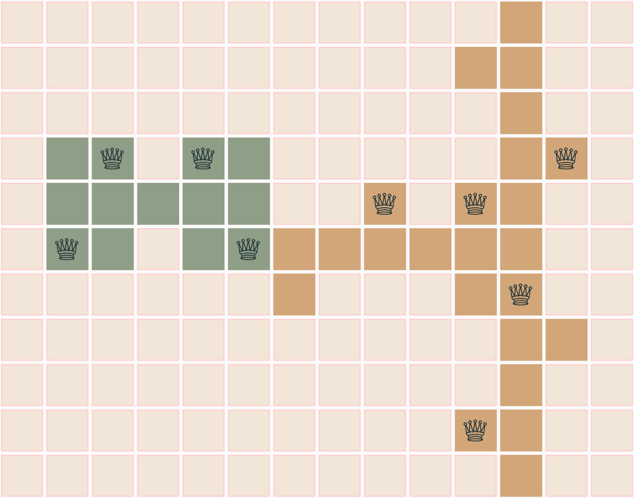
La domination maximale requiert quatre dames et il y a deux façons de la faire.

$P(x|^{X}_{V}) =$  , $P(x|^{X}_{F}) =$  .

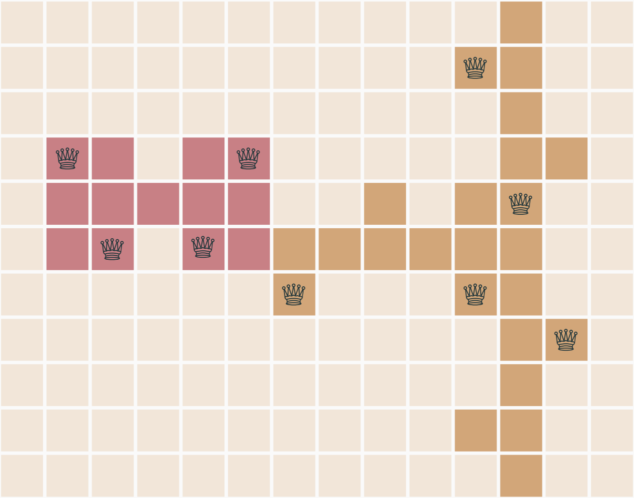
Gadget de communication



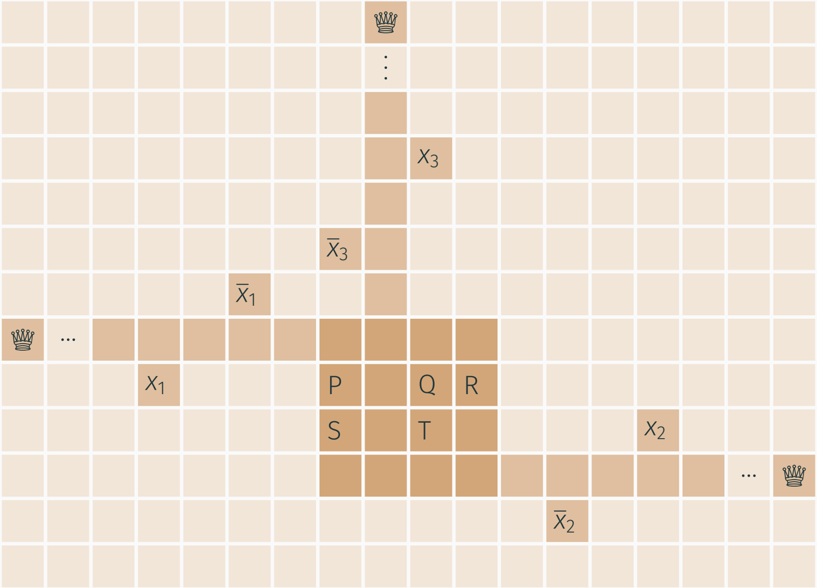
Gadget de communication : Vrai



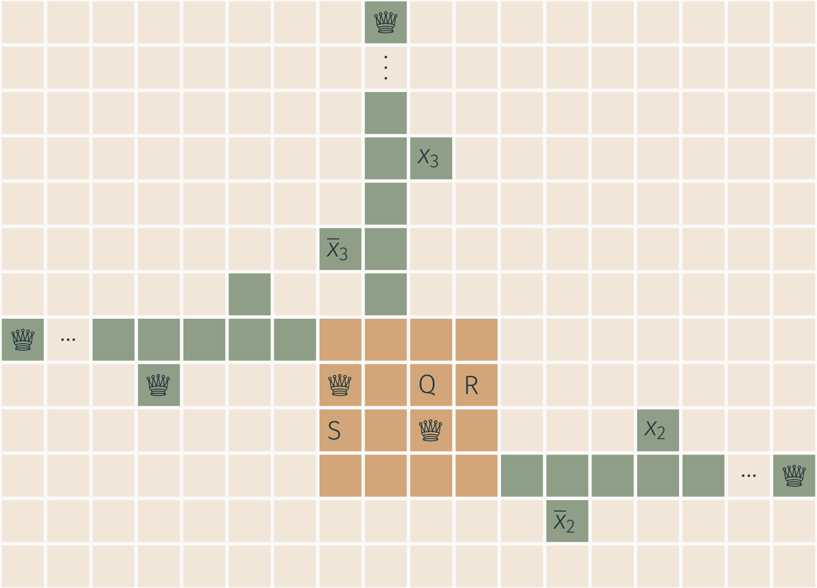
Gadget de communication : Faux



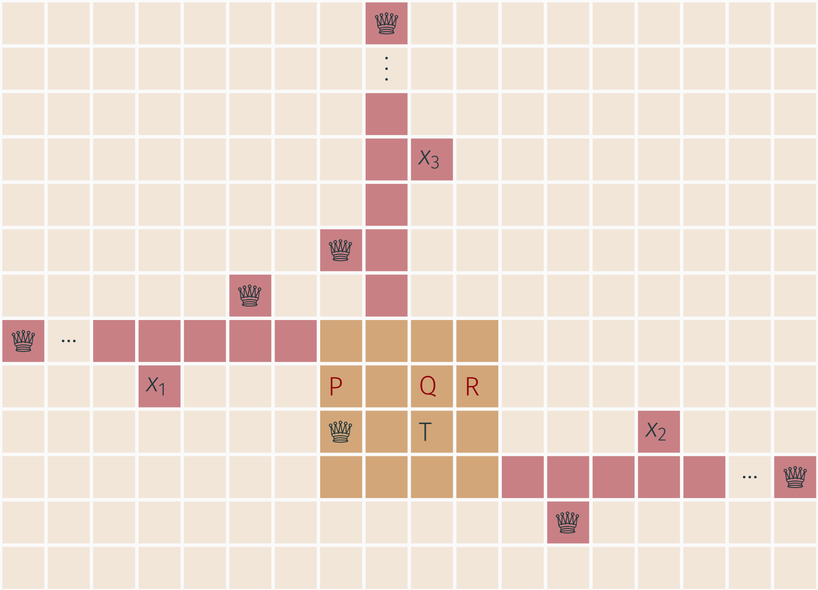
Gadget de clause



Gadget de clause : vrai



Gadget clause : faux



Réduction

D'une instance de $\mathrm{P3SAT}_{\underline{\overline{3}}}$, on crée un polyomino. Chaque gadget, sauf les clauses a un nombre fixe de dames maximal. Seulement si toutes les clauses sont vraies obtient-on le nombre maximal de dame dominant le polyomino.

Proposition

Cette réduction est polynomiale, et le polyomino obtenu est de taille polynomial.

Liste d'épicerie de complexité pour P ou NP (bis)

1. Trouver un algorithme polynomial pour vérifier une réponse
   1.1 Trouvé ? Le problème est dans la classe **NP** ; passer au point 2
   1.2 Pas trouvé ? Passer au point 3
2. Essayer de trouver un algorithme polynomial
   2.1 Trouvé ? Voilà, votre problème est **P**
   2.2 Pas trouvé ? Passer au point 3
3. Choisir votre problème NP-complet préféré
4. Trouver une réduction polynomiale jusqu'au problème à l'étude
   4.1 Trouvé ? Si 1.1, **NP**-complet ; si 1.2, **NP**-difficile
   4.2 Pas trouvé ? Lire sur les autres classes de complexité et espérer

Résultat

Nous avons prouvé le théorème, la domination maximale indépendante des polyominos pour les dames est NP-complet !

Conclusion

- Le problème de domination minimale des dames sur l'échiquier est de complexité inconnue
- pour les polyomino : NP-complet
- Pour maximal indépendante, sur l'échiquier, c'est P
- Pour les polyominos, c'est NP-complet
- Plus dans un article à venir, très bientôt !

Questions ?