Koninginnen, bijzondere schaakborden en meer

PRIME Problem-solving avond, special

Alexis Langlois-Rémillard

2021-11-18

UGent

Wie ben ik?

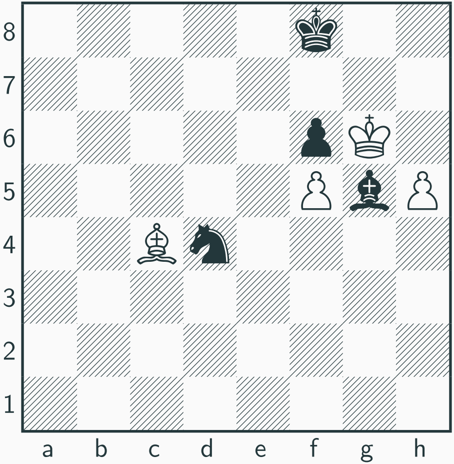
Alexis, Championnat international de Varennes 2018 – foto Robbie Paquin

Wiskunde en schaak

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*

A chess problem is genuine mathematics, but it is in some way "trivial" mathematics.

Schaak en wiskunde



Wereld kampioenschap 2021

Caruana-Nepomniachtchi – foto: Lennart Ootes, Norway Chess

De problemen

Een snelle uitleg

Niet-aanvallende dames

1. Het klassieke n-Koninginnenprobleem
2. Op een torus

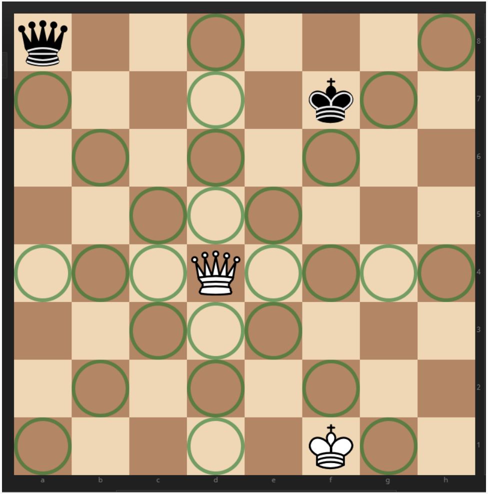
Dominerende stukken

3. Op een schaakbord
4. Op polyomino's

Varia

5. Paardentour, betegeling en graaf
6. Wat je wilt!

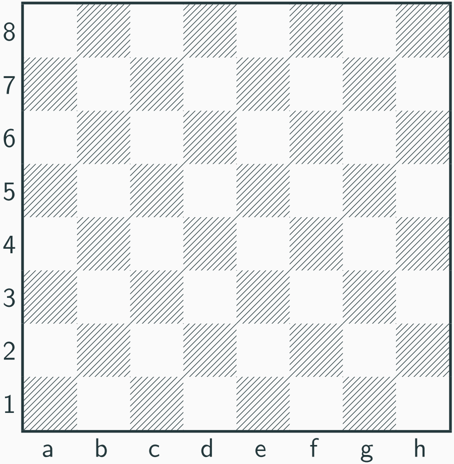
8-Koninginnenprobleem



Dames

Het probleem

Hoeveel manieren zijn er om 8 dames op een 8×8 schaakbord te zetten zodat geen enkele dame een andere dame aanvalt?



Methoden

Brute force

- Plaats alle dames
- Test
- Ja of nee

Backtracking

Methoden

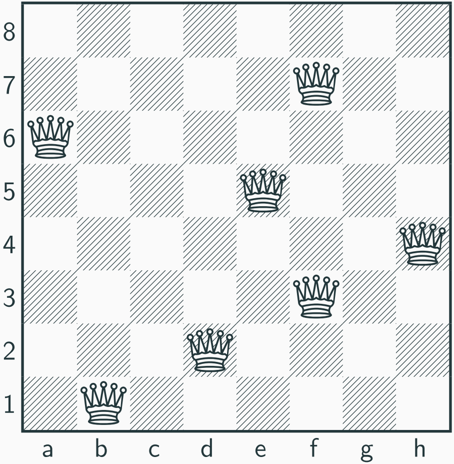
Brute force

- Plaats alle dames
- Test
- Ja of nee

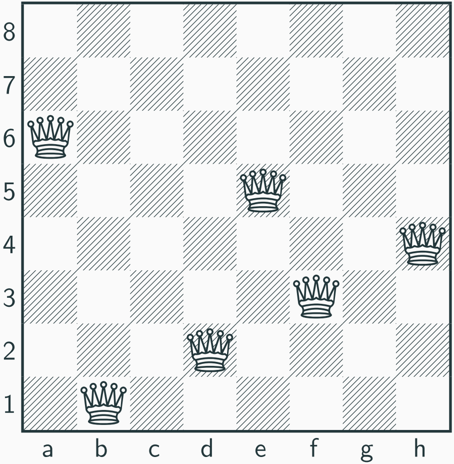
Backtracking

- Plaats dames één bij één
- Test
- Ja en doorgaan of nee en teruggaan

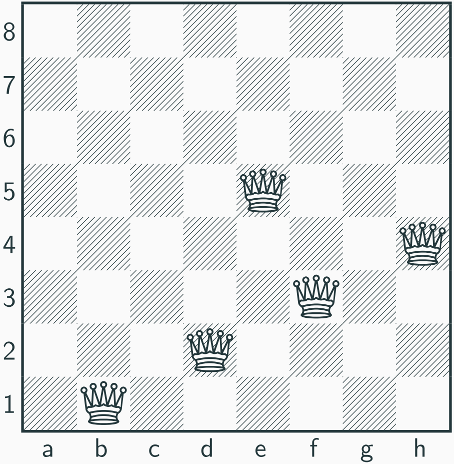
Backtracking



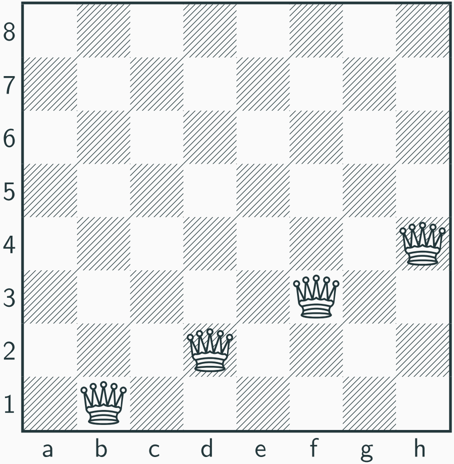
Backtracking



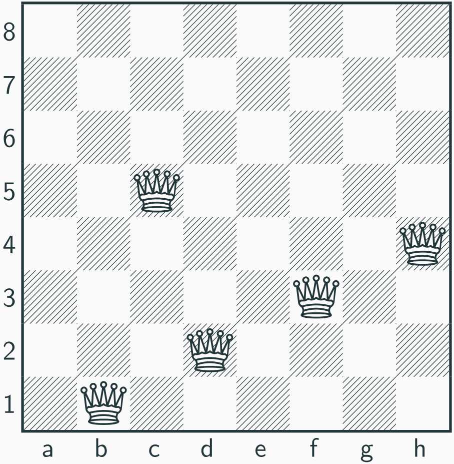
Backtracking



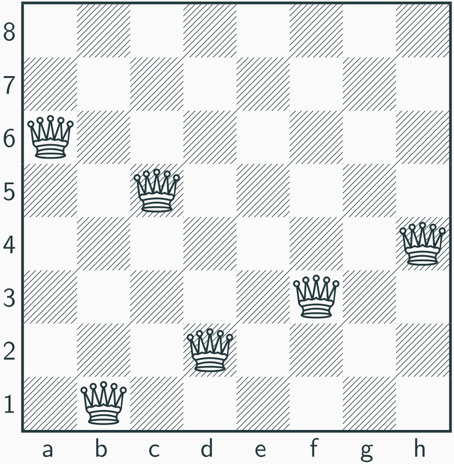
Backtracking



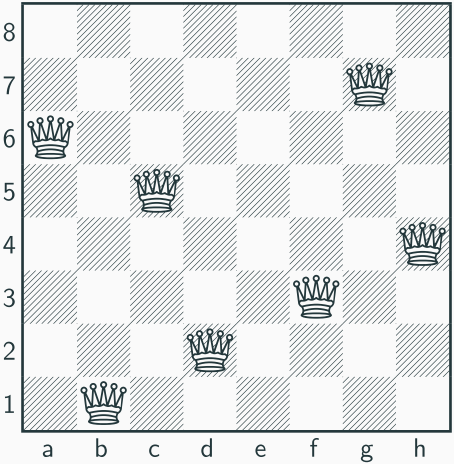
Backtracking



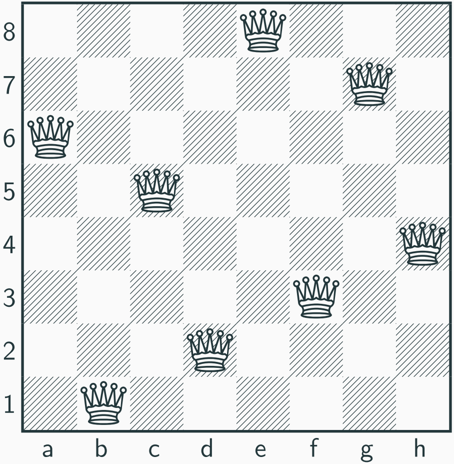
Backtracking



Backtracking



Backtracking



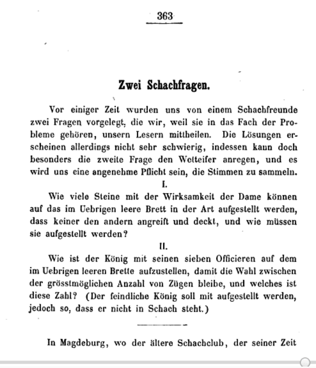
Complexiteit

Hoewel je backtracking kan gebruiken, blijft de complexiteit groot. Brute force is $\binom{64}{8}$, dus ongeveer n^n

Geschiedenis van het probleem

Eerste versie

- Schachzeitung: Duits schaaktijdschrijft 1846-1988
- *Schachfreund* is Max Bezzel



363

Zwei Schachfragen.

Vor einiger Zeit wurden uns von einem Schachfreunde zwei Fragen vorgelegt, die wir, weil sie in das Fach der Probleme gehören, unsern Lesern mittheilen. Die Lösungen erscheinen allerdings nicht sehr schwierig, indessen kann doch besonders die zweite Frage den Wetteifer anregen, und es wird uns eine angenehme Pflicht sein, die Stimmen zu sammeln.

I.

Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den andern angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?

II.

Wie ist der König mit seinen sieben Officieren auf dem im Uebrigen leeren Brette aufzustellen, damit die Wahl zwischen der grösstmöglichen Anzahl von Zügen bleibe, und welches ist diese Zahl? (Der feindliche König soll mit aufgestellt werden, jedoch so, dass er nicht in Schach steht.)

In Magdeburg, wo der ältere Schachclub, der seiner Zeit

Schachzeitung, September 1848

Max Bezzel – foto : Wikipedia

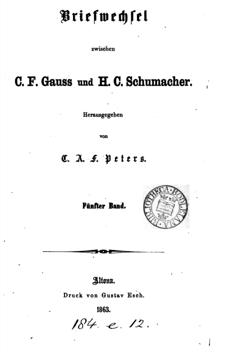
Gauss

Karl Friedriech Gauss (1777-1855) – gravuur: Britannica

- Prins van de wiskunde
- Astronoom, meetkundiger, landmeter
- IJverige correspondent
- *pauca sed matura*

Briefwisseling

- Van september tot en met oktober 1850, briefwisseling over het 8-koninginnenprobleem met Schumacher
- Gauss geeft een oplossing
- Omzichtig en niet opgelost


Briefwechsel

zwischen

C. F. Gauss und H. C. Schumacher.

Herausgegeben

von

C. A. F. Peters.

Fünfter Band.

Altona.

Druck von Gustav Esch.

1863.

Briefwisseling Gauss-Schumacher – Editie 1863

Briefwisseling

- Van september tot en met oktober 1850, briefwisseling over het 8-koninginnenprobleem met Schumacher
- Gauss geeft een oplossing
- Omzichtig en niet opgelost

Heinrich Christian Schumacher – gravuur : Wikipedia

Briefwisseling

- Van september tot en met oktober 1850, briefwisseling over het 8-koninginnenprobleem met Schumacher
- Gauss geeft een oplossing
- Omzichtig en niet opgelost
- Schumacher stierf in december 1850

Heinrich Christian Schumacher – gravuur : Wikipedia

Gauss’ oplossing

Oplossing van Gauss

Brief aan Schumacher, 20 september 1850

Schwer ist es ubrigens nicht, durch ein methodisches Tatonnireu sich diese Gewissheit zu verschaffen, wenn man 1 oder ein Paar Stunden daran wenden will.

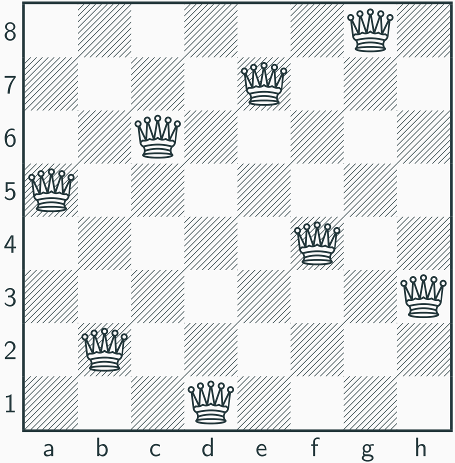
Gauss' pad

1. Één dame in elke kolom en één in elke rij

Gauss' pad

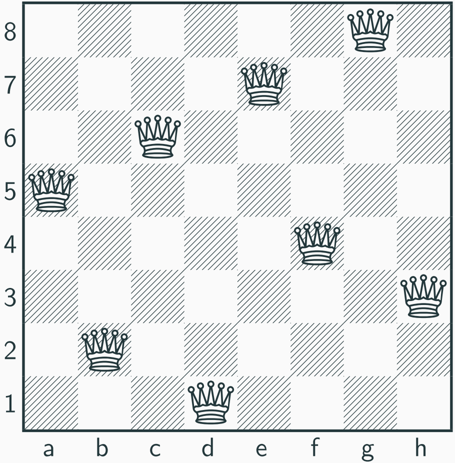
1. Één dame in elke kolom en één in elke rij
2. Permutatie van $\{1, 2, \dots, 8\}$ (positie van Dame i)

1. Één dame in elke kolom en één in elke rij
2. Permutatie van $\{1, 2, \ldots, 8\}$ (positie van Dame *i*)



Gauss' pad

1. Één dame in elke kolom en één in elke rij
2. Permutatie van $\{1, 2, \ldots, 8\}$ (positie van Dame i)



$(5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3)$

Gauss' oplossing

1. Begin met een torenoplossing (permutatie)
2. Zorgen voor diagonalen

Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)

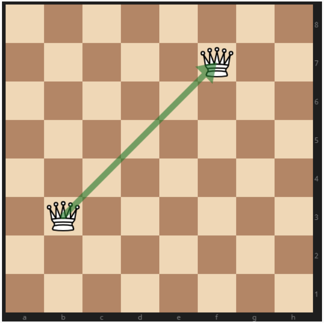
Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)

Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)
- twee dames (j, y_j) en (k, y_k) delen dezelfde diagonaal NO als

$$y_j - j = y_k - k$$

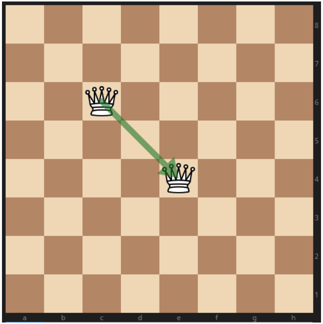


$$y = x + b$$

Diagonalenzorg

- Twee types van diagonalen : NO (richtingscoëfficiënt 1) en ZO (richtingscoëfficiënt -1)
- twee dames (j, y_j) en (k, y_k) delen dezelfde diagonaal ZO als

$$y_j + j = y_k + k$$



$$y = -x + b$$

Diagonalenzorg

$(y_1, \ldots, y_8)$ is een oplossing als voor alle $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k - k \neq y_j - j)$$

Diagonalenzorg

$(y_1, \ldots, y_8)$ is een oplossing als voor alle $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k - k \neq y_j - j)$$

Bijvoorbeeld $(1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$ is een oplossing:

	1	5	8	6	3	7	2	4
+	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	7	11	10	8	13	9	12

	1	5	8	6	3	7	2	4
-	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	3	5	2	-2	-1	-5	-4

,

Diagonalenzorg

$(y_1, \ldots, y_8)$ is een oplossing als voor alle $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k - k \neq y_j - j)$$

Bijvoorbeeld $(1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$ is een oplossing:

	1	5	8	6	3	7	2	4
+	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	7	11	10	8	13	9	12

	1	5	8	6	3	7	2	4
-	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	3	5	2	-2	-1	-5	-4

,

Maar $(1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8)$ is er geen omdat $8 + 1 = 1 + 8$.

En...

Complexiteit is nu faculteit in n voor een $n \times n$ schaakbord.

$$S1 = (1, 7, 4, 6, 8, 2, 5, 3) \qquad S2 = (1, 7, 5, 8, 2, 4, 6, 3) \qquad S3 = (2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5)$$
$$S4 = (4, 1, 5, 8, 2, 7, 3, 6) \qquad S4 = (5, 1, 8, 4, 2, 7, 3, 6) \qquad S6 = (3, 1, 7, 5, 8, 2, 4, 6)$$
$$S7 = (5, 1, 4, 6, 8, 2, 7, 3) \qquad S8 = (7, 1, 3, 8, 6, 4, 2, 5) \qquad S9 = (5, 1, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$$
$$S10 = (5, 7, 1, 4, 2, 8, 6, 3) \qquad S11 = (6, 3, 1, 8, 4, 2, 7, 5) \qquad S12 = (5, 3, 1, 7, 2, 8, 6, 4)$$

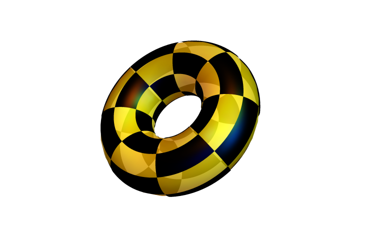
Veralgemening met een kopje koffie

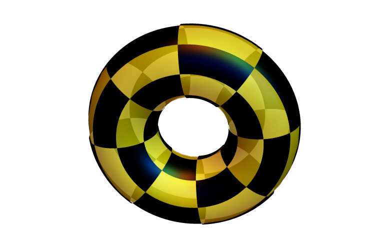
Pólya

Georg Pólya – Wikipedia

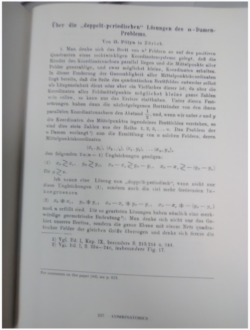
- Hongaarse, Zwitse en Amerikaanse wiskundige (1887-1985)
- *How to Solve It?*
- Algebra, combinatoriek, analyse, onderwijs, etc.
- Interessrert zich voor het probleem van *n* dames in 1918 met een kleine aanpassing

Mooie kopjes





Pólya



Über die „doppelt-periodischen" Lösungen des n-Damen-Problems.

Von G. Pólya in Zürich.

1. Man denke sich das Brett von n^2 Feldern so auf den positiven Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelegt, daß die Ränder den Koordinatenachsen parallel liegen und die Mittelpunkte aller Felder ganzzahlige, und zwar möglichst kleine, Koordinaten erhalten. In dieser Forderung der Ganzzahligkeit aller Mittelpunktskoordinaten liegt bereits, daß die Seite des quadratischen Brettfeldes entweder selbst als Längeneinheit dient oder aber ein Vielfaches dieser ist; da aber die Koordinaten aller Feldmittelpunkte möglichst kleine ganze Zahlen sein sollen, so kann nur das Erstere statthaben. Unter diesen Festsetzungen haben dann die nächstgelegenen Brettränder von den ihnen parallelen Koordinatenachsen den Abstand $\frac{1}{2}$, und, wenn wir unter x und y die Koordinaten des Mittelpunktes irgendeines Brettfeldes verstehen, so sind dies stets Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$. Das Problem der n Damen verlangt[1]) nun die Ermittlung von n solchen Feldern, deren Mittelpunktskoordinaten

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots (x_n, y_n),$$

den folgenden $2n(n-1)$ Ungleichungen genügen:

$$(1) \quad x_\mu \gtrless x_\nu, \quad y_\mu \gtrless y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \gtrless y_\mu - y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \gtrless -(y_\mu - y_\nu)$$

für $\mu \gtrless \nu$.

Ich nenne eine Lösung nun „doppelt-periodisch", wenn nicht nur diese Ungleichungen (1), sondern auch die viel mehr fordernden Inkongruenzen

$$(2) \quad x_\mu \not\equiv x_\nu, \quad y_\mu \not\equiv y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \not\equiv y_\mu - y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \not\equiv -(y_\mu - y_\nu)$$

mod. n erfüllt sind. Die so gearteten Lösungen haben nämlich eine merkwürdige geometrische Bedeutung[2]): Man denke sich nicht nur das Gebiet unseres Brettes, sondern die ganze Ebene mit einem Netz quadratischer Felder der gleichen Größe überzogen und denke sich ferner die

1) Vgl. Bd. I, Kap. IX, besonders S. 213/214 u. 244.
2) Vgl. Bd. I, S. 234—240, insbesondere Fig. 17.

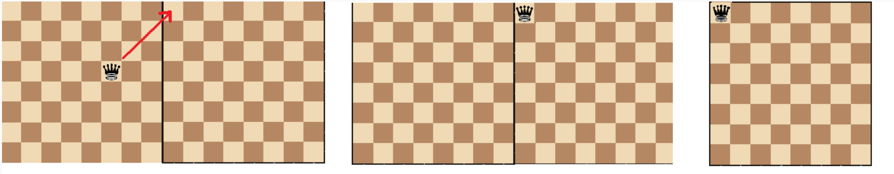
For comments on this paper [44], see p. 615.

237 COMBINATORICS

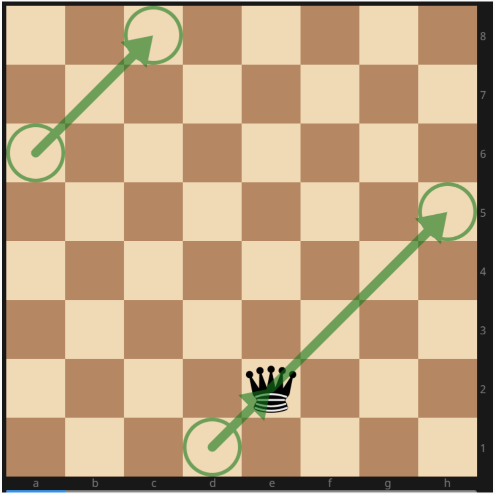
Über die "doppelt-periodischen" Lösungen des n-Damen-Problems

- 1918
- Het n-Damesprobleem met dubbel periodische oplossingen, *bref* op een torus!

Dames op tori



Dames op tori



How to Solve It?

Hoeveel oplossingen zijn er voor het 8 koninginnenprobleem op een torus?

Antwoord...

8,1,7	8,2,6	8,3,5	8,4,4	8,5,3	8,6,2	8,7,1	8,8,8
7,1,8	7,2,7	7,3,6	7,4,5	7,5,4	7,6,3	7,7,2	7,8,1
6,1,1	6,2,8	6,3,7	6,4,6	6,5,5	6,6,4	6,7,3	6,8,2
5,1,2	5,2,1	5,3,8	5,4,7	5,5,6	5,6,5	5,7,4	5,8,3
4,1,3	4,2,2	4,3,1	4,4,8	4,5,7	4,6,6	4,7,5	4,8,4
3,1,4	3,2,3	3,3,2	3,4,1	3,5,8	3,6,7	3,7,6	3,8,5
2,1,5	2,2,4	2,3,3	2,4,2	2,5,1	2,6,8	2,7,7	2,8,6
1,1,6	1,2,5	1,3,4	1,4,3	1,5,2	1,6,1	1,7,8	1,8,7

Theorem van Pólya

Probleem des n dames op een torus

Er is een oplossing als en slechts als n ...

Een paar woorden over de andere problemen

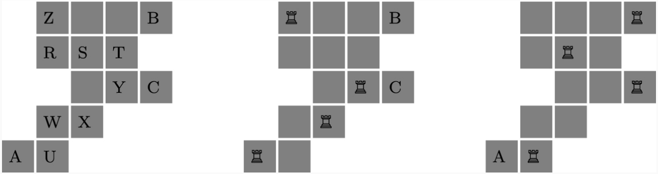
Dominerende dames

$D(n)$ is het minimale aantal dames nodig om alle velden op een $n \times n$ schaakbord te beschermen.

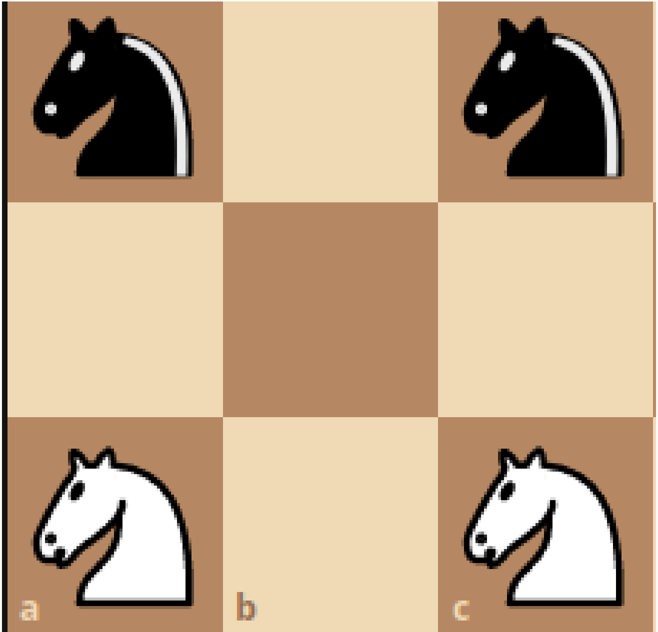
$d(n)$ is hetzelfde met de extra conditie dat de dames zichzelf niet kunnen aanvallen.

Polyomino

Een polyomino is een betegeling van samenhangende velden. In dimensie d is het een samenhangende deelverzameling van $\mathbb{Z}^d$.



Alpert, H., Roldán, É. Art Gallery Problem with Rook and Queen Vision. Graphs and Combinatorics 37, 621–642 (2021) Fig. 5


a
b
c

References i

Bell, J., and Stevens, B.
A survey of known results and research areas for n-queens.
Discrete Mathematics 309, 1 (2009), 1 – 31.

Campbell, P. J.
Gauss and the eight queens problem: A study in miniature of the propagation of historical error.
Historia mathematica 4, 4 (1977), 397–404.

Peters, C.
***Briefwechrel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*.**
1863.

PÓLYA, G.
Uber die "doppelt-periodischen" lösungen des n-damen-problems.
W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele 1 (1921), 364–374.

RIVIN, I., VARDI, I., AND ZIMMERMANN, P.
The n-queens problem.
The American Mathematical Monthly 101, 7 (1994), 629–639.