Huit dames pour un échiquier

Introduction échiquéenne à la pensée mathématique, de Gauss à Pólya

Alexis Langlois-Rémillard

2018-11-28

Université de Montréal

Résumé

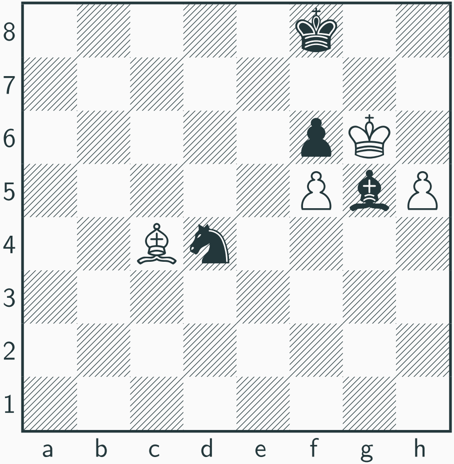
Un brin de moi

Alexis au Championnat international de Varennes – photo Robbie Paquin

Maths et échecs

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*

A chess problem is genuine mathematics, but it is in some way "trivial" mathematics.


8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

Championnat du monde d'échecs

Caruana-Carlsen – photo : The Guardian

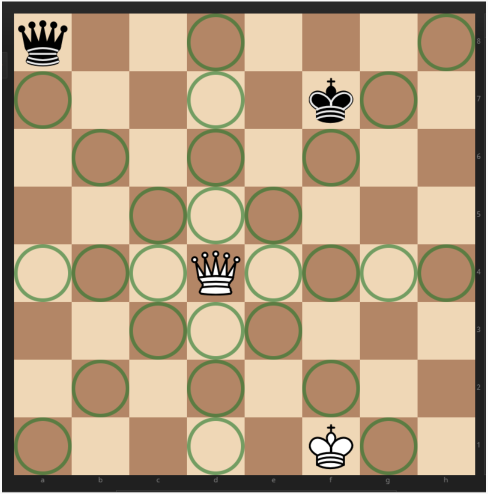
Championnat du monde d'échecs

Caruana-Carlsen – photo : The Guardian

Go Fabi!

Résoudre le problème

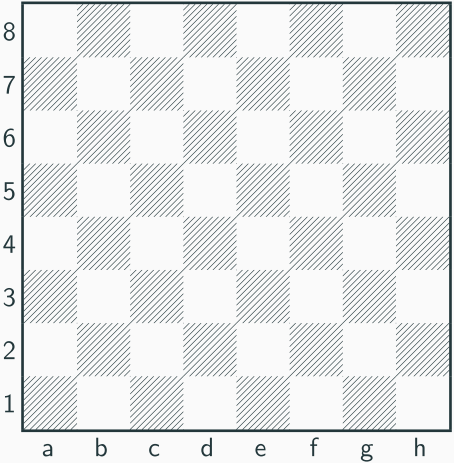
Le mouvement des dames



Mouvement de la dame

Résolvez!

Êtes-vous capable de placer huit dames sur un échiquier sans qu'elles ne puissent s'entrecapturer?



Solution

Quel brave ou quelle bravesse veut montrer sa solution?

Solution

Merci à Francis Huot-Chantal ▸ Solution

Méthodes

Force brute

Méthodes

Force brute

- Place toutes les dames
- Teste
- Accepte ou refuse

Méthodes

Force brute

- Place toutes les dames
- Teste
- Accepte ou refuse

Retour sur trace

Méthodes

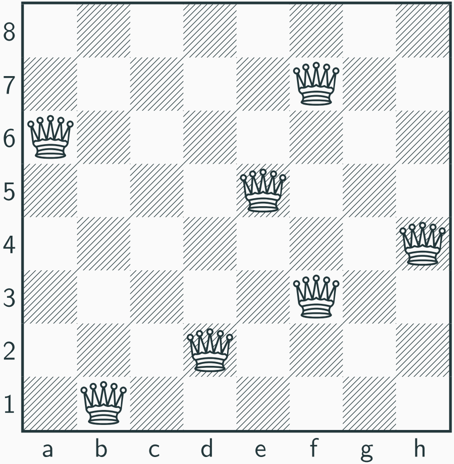
Force brute

- Place toutes les dames
- Teste
- Accepte ou refuse

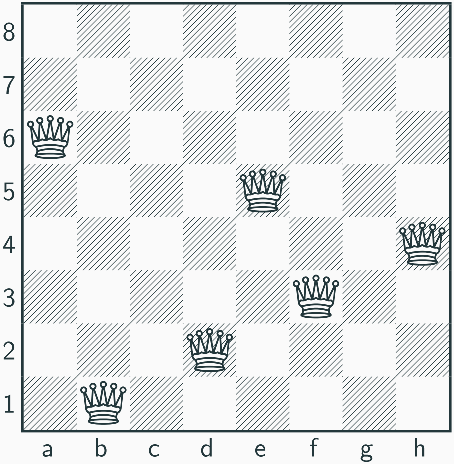
Retour sur trace

- Place une dame à la fois
- Teste
- Accepte et continue ou refuse et revient

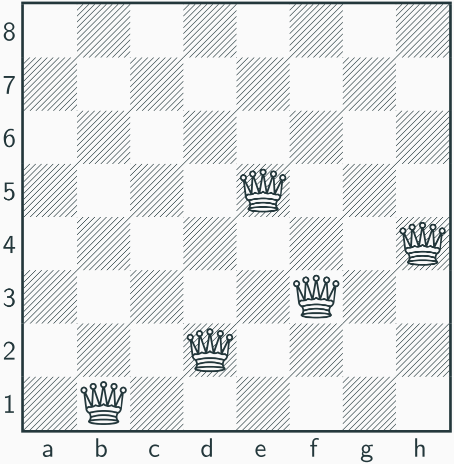
Retour sur trace



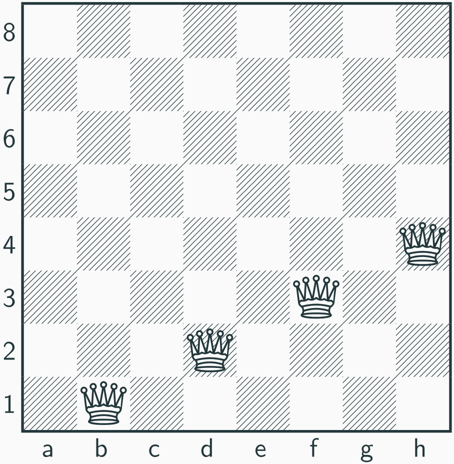
Retour sur trace



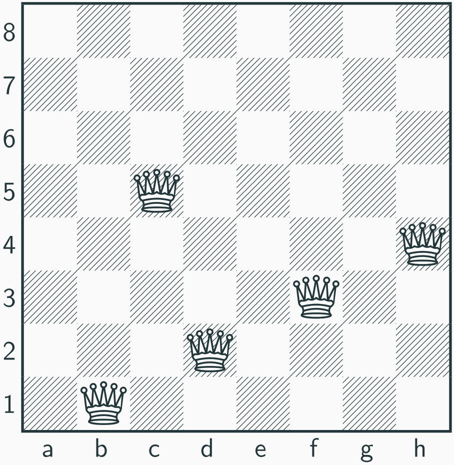
Retour sur trace



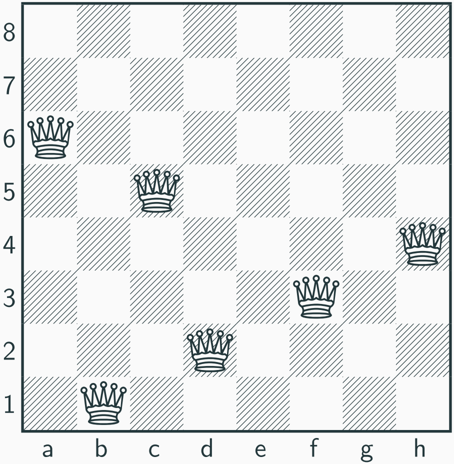
Retour sur trace



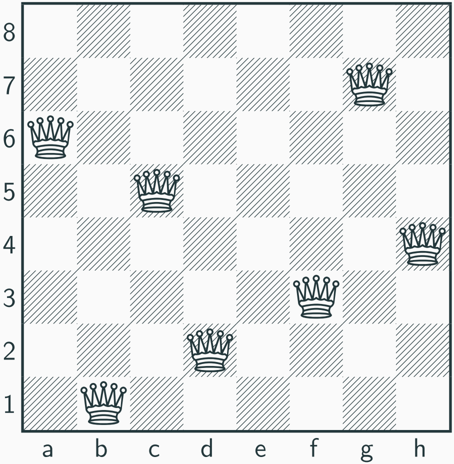
Retour sur trace



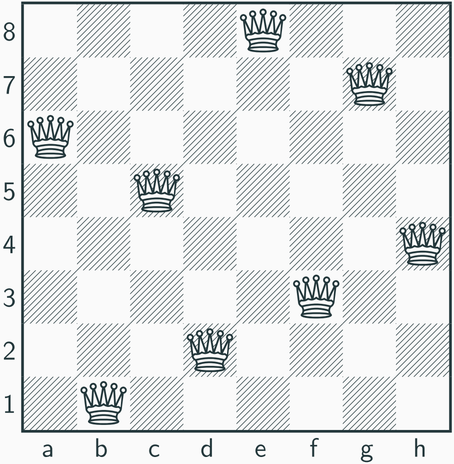
Retour sur trace



Retour sur trace



Retour sur trace



Un brin d’histoire

Problème, version originale

363

Zwei Schachfragen.

Vor einiger Zeit wurden uns von einem Schachfreunde zwei Fragen vorgelegt, die wir, weil sie in das Fach der Probleme gehören, unsern Lesern mittheilen. Die Lösungen erscheinen allerdings nicht sehr schwierig, indessen kann doch besonders die zweite Frage den Wetteifer anregen, und es wird uns eine angenehme Pflicht sein, die Stimmen zu sammeln.

I.

Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den andern angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?

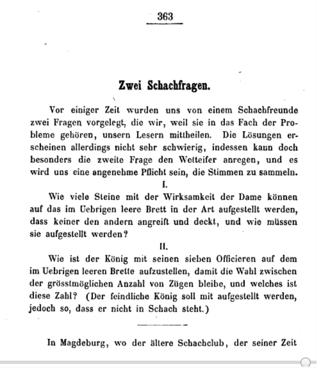
II.

Wie ist der König mit seinen sieben Officieren auf dem im Uebrigen leeren Brette aufzustellen, damit die Wahl zwischen der grösstmöglichen Anzahl von Zügen bleibe, und welches ist diese Zahl? (Der feindliche König soll mit aufgestellt werden, jedoch so, dass er nicht in Schach steht.)

In Magdeburg, wo der ältere Schachclub, der seiner Zeit

Schachzeitung, Septembre 1848

Problème, version originale



Zwei Schachfragen.

Vor einiger Zeit wurden uns von einem Schachfreunde zwei Fragen vorgelegt, die wir, weil sie in das Fach der Probleme gehören, unsern Lesern mittheilen. Die Lösungen erscheinen allerdings nicht sehr schwierig, indessen kann doch besonders die zweite Frage den Wetteifer anregen, und es wird uns eine angenehme Pflicht sein, die Stimmen zu sammeln.

I.

Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den andern angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?

II.

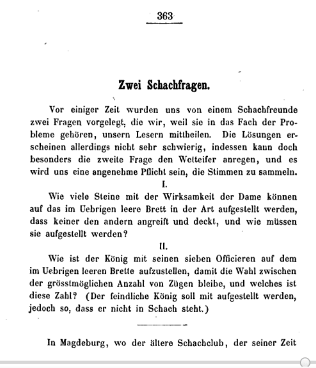
Wie ist der König mit seinen sieben Officieren auf dem im Uebrigen leeren Brette aufzustellen, damit die Wahl zwischen der grösstmöglichen Anzahl von Zügen bleibe, und welches ist diese Zahl? (Der feindliche König soll mit aufgestellt werden, jedoch so, dass er nicht in Schach steht.)

In Magdeburg, wo der ältere Schachclub, der seiner Zeit

Schachzeitung, Septembre 1848

- Schachzeitung : journal d'échecs allemand 1846-1988

Problème, version originale


363

Zwei Schachfragen.

Vor einiger Zeit wurden uns von einem Schachfreunde zwei Fragen vorgelegt, die wir, weil sie in das Fach der Probleme gehören, unsern Lesern mittheilen. Die Lösungen erscheinen allerdings nicht sehr schwierig, indessen kann doch besonders die zweite Frage den Wetteifer anregen, und es wird uns eine angenehme Pflicht sein, die Stimmen zu sammeln.

I.

Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den andern angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?

II.

Wie ist der König mit seinen sieben Officieren auf dem im Uebrigen leeren Brette aufzustellen, damit die Wahl zwischen der grösstmöglichen Anzahl von Zügen bleibe, und welches ist diese Zahl? (Der feindliche König soll mit aufgestellt werden, jedoch so, dass er nicht in Schach steht.)

In Magdeburg, wo der ältere Schachclub, der seiner Zeit

Schachzeitung, Septembre 1848

- Schachzeitung : journal d'échecs allemand 1846-1988
- *Schachfreund* est Max Bezzel

Max Bezzel – photo : Wikipedia

Gauss, un aperçu

Karl Friedriech Gauss
(1777-1855)– gravure :
Britannica

- Prince des mathématiques
- Astronome, géomètre, arpenteur

Gauss, un aperçu

Karl Friedriech Gauss (1777-1855)– gravure : Britannica

- Prince des mathématiques
- Astronome, géomètre, arpenteur
- Correspondant assidu

Gauss, un aperçu

Karl Friedriech Gauss
(1777-1855)– gravure :
Britannica

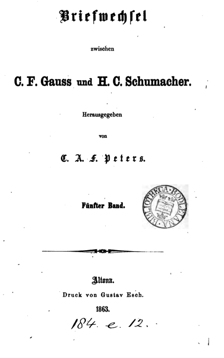
- Prince des mathématiques
- Astronome, géomètre, arpenteur
- Correspondant assidu
- Grande rigueur

Gauss, un aperçu

Karl Friedriech Gauss (1777-1855)– gravure : Britannica

- Prince des mathématiques
- Astronome, géomètre, arpenteur
- Correspondant assidu
- Grande rigueur
- *pauca sed matura*

- De septembre à octobre 1850, correspondance sur le problème des huit dames avec Schumacher
- Gauss y expose un plan de solution
- Il reste très circonspect



Briefwechsel

zwischen

C. F. Gauss und H. C. Schumacher.

Herausgegeben

von

C. A. F. Peters.

Fünfter Band.

Altona.

Druck von Gustav Esch.

1863.

Correspondance Gauss-Schumacher – recueil 1863

Correspondance

- De septembre à octobre 1850, correspondance sur le problème des huit dames avec Schumacher
- Gauss y expose un plan de solution
- Il reste très circonspect

Heinrich Christian Schumacher – gravure : Wikipedia

Correspondance

- De septembre à octobre 1850, correspondance sur le problème des huit dames avec Schumacher
- Gauss y expose un plan de solution
- Il reste très circonspect
- Schumacher meurt en décembre 1850

Heinrich Christian Schumacher – gravure : Wikipedia

Résoudre avec Gauss

Résolution de Gauss

Lettre à Schumacher, 20 septembre 1850

Schwer ist es ubrigens nicht, durch ein methodisches Tatonnireu sich diese Gewissheit zu verschaffen, wenn man 1 oder ein Paar Stunden daran wenden will.

La résolution gaussienne

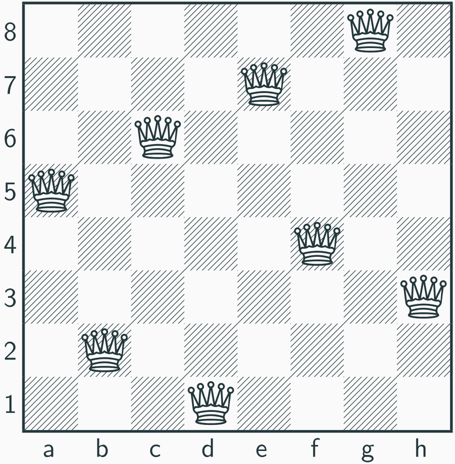
1. Une dame par colonne et une dame par rangée

La résolution gaussienne

1. Une dame par colonne et une dame par rangée
2. Permutation de $\{1, 2, \ldots, 8\}$

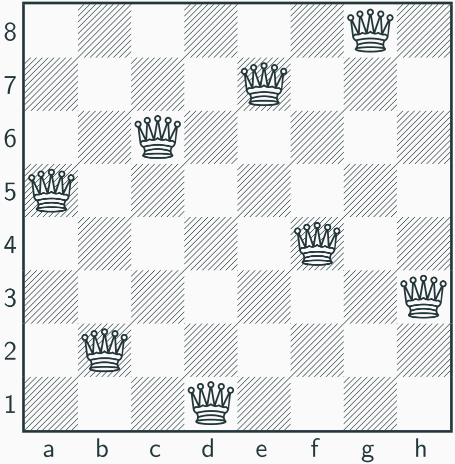
La résolution gaussienne

1. Une dame par colonne et une dame par rangée
2. Permutation de $\{1, 2, \ldots, 8\}$



La résolution gaussienne

1. Une dame par colonne et une dame par rangée
2. Permutation de $\{1, 2, \ldots, 8\}$



$(5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3)$

La résolution gaussienne

1. Une dame par colonne et une dame par rangée
2. Permutation de $\{1, 2, \ldots, 8\}$
3. Gérer les diagonales

Gérer les diagonales

- Deux types de diagonales : NE et SE

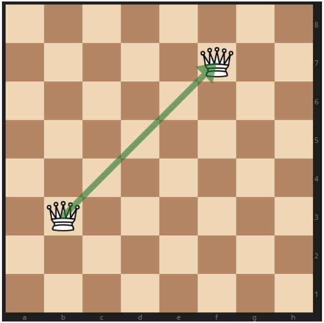
Gérer les diagonales

- Deux types de diagonales : NE et SE

Gérer les diagonales

- Deux types de diagonales : NE et SE
- Deux dames (j, y_j) et (k, y_k) sont sur la même diagonale NE si

$$y_j + k = y_k + j \tag{1}$$



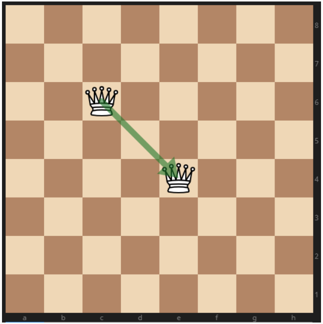
Gérer les diagonales

- Deux types de diagonales : NE et SE

Gérer les diagonales

- Deux types de diagonales : NE et SE
- Deux dames (j, y_j) et (k, y_k) sont sur la même diagonale SE si

$$y_j + j = y_k + k \tag{2}$$



Gérer les diagonales

Pour vérifier une position $(y_1, \ldots, y_8)$, il suffit de s'assurer que pour tout $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$ nous ayons

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k + (9 - k) \neq y_j + (9 - j)$$

Gérer les diagonales

Pour vérifier une position $(y_1, \ldots, y_8)$, il suffit de s'assurer que pour tout $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$ nous ayons

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k + (9 - k) \neq y_j + (9 - j)$$

Par exemple, $(1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$ est une solution :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 2 & 4 \\
+ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
 & 2 & 7 & 11 & 10 & 8 & 13 & 9 & 12
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 2 & 4 \\
+ & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
 & 9 & 12 & 14 & 11 & 7 & 10 & 4 & 5
\end{array},$$

Gérer les diagonales

Pour vérifier une position $(y_1, \ldots, y_8)$, il suffit de s'assurer que pour tout $k, j \in \{1, \ldots, 8\}$ nous ayons

$$y_k + k \neq y_j + j \qquad\qquad y_k + (9-k) \neq y_j + (9-j)$$

Par exemple, $(1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4)$ est une solution :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} & 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ + & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & 2 & 7 & 11 & 10 & 8 & 13 & 9 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} & 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ + & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline & 9 & 12 & 14 & 11 & 7 & 10 & 4 & 5 \end{array},$$

Mais $(1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8)$ n'en est pas une, car $8 + 1 = 1 + 8$.

Le reste

Pour le reste, il suffit de gérer les solutions équivalentes.
Pour référence :

$$
\begin{array}{rrr}
S1 = (1,7,4,6,8,2,5,3) & S2 = (1,7,5,8,2,4,6,3) & S3 = (2,4,6,8,3,1,7,5) \\
S4 = (4,1,5,8,2,7,3,6) & S4 = (5,1,8,4,2,7,3,6) & S6 = (3,1,7,5,8,2,4,6) \\
S7 = (5,1,4,6,8,2,7,3) & S8 = (7,1,3,8,6,4,2,5) & S9 = (5,1,8,6,3,7,2,4) \\
S10 = (5,7,1,4,2,8,6,3) & S11 = (6,3,1,8,4,2,7,5) & S12 = (5,3,1,7,2,8,6,4)
\end{array}
$$

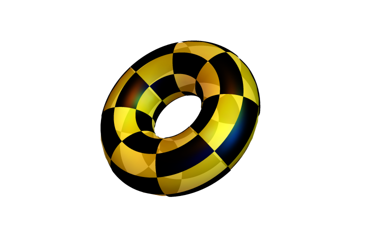
Généralisation avec une tasse de café

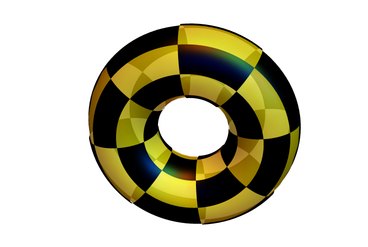
Pólya

George Pólya

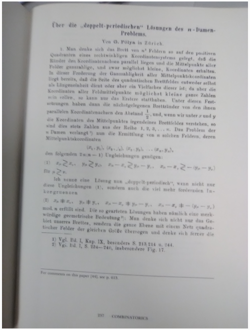
- Mathématicien hongrois, suisse et américain (1887-1985)
- *How to Solve It?*
- Algèbre, combinatoire, enseignement, analyse, etc.
- Attaque le problème des huit dames en 1918

Pólya attaque





Pólya défend



Über die „doppelt-periodischen" Lösungen des n-Damen-Problems.

Von G. Pólya in Zürich.

1. Man denke sich das Brett von n^2 Feldern so auf den positiven Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelegt, daß die Ränder den Koordinatenachsen parallel liegen und die Mittelpunkte aller Felder ganzzahlige, und zwar möglichst kleine, Koordinaten erhalten. In dieser Forderung der Ganzzahligkeit aller Mittelpunktskoordinaten liegt bereits, daß die Seite des quadratischen Brettfeldes entweder selbst als Längeneinheit dient oder aber ein Vielfaches dieser ist; da aber die Koordinaten aller Feldmittelpunkte möglichst kleine ganze Zahlen sein sollen, so kann nur das Erstere statthaben. Unter diesen Festsetzungen haben dann die nächstgelegenen Brettränder von den ihnen parallelen Koordinatenachsen den Abstand $\frac{1}{2}$, und, wenn wir unter x und y die Koordinaten des Mittelpunktes irgendeines Brettfeldes verstehen, so sind dies stets Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$. Das Problem der n Damen verlangt [1]) nun die Ermittlung von n solchen Feldern, deren Mittelpunktskoordinaten

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots (x_n, y_n),$$

den folgenden $2n(n-1)$ Ungleichungen genügen:

(1) $x_\mu \gtrless x_\nu$, $y_\mu \gtrless y_\nu$, $x_\mu - x_\nu \gtrless y_\mu - y_\nu$, $x_\mu - x_\nu \gtrless -(y_\mu - y_\nu)$

für $\mu \gtrless \nu$.

Ich nenne eine Lösung nun „doppelt-periodisch", wenn nicht nur diese Ungleichungen (1), sondern auch die viel mehr fordernden Inkongruenzen

(2) $x_\mu \not\equiv x_\nu$, $y_\mu \not\equiv y_\nu$, $x_\mu - x_\nu \not\equiv y_\mu - y_\nu$, $x_\mu - x_\nu \not\equiv -(y_\mu - y_\nu)$

mod. n erfüllt sind. Die so gearteten Lösungen haben nämlich eine merkwürdige geometrische Bedeutung [2]): Man denke sich nicht nur das Gebiet unseres Brettes, sondern die ganze Ebene mit einem Netz quadratischer Felder der gleichen Größe überzogen und denke sich ferner die

1) Vgl. Bd. I, Kap. IX, besonders S. 213/214 u. 244.
2) Vgl. Bd. I, S. 234—240, insbesondere Fig. 17.

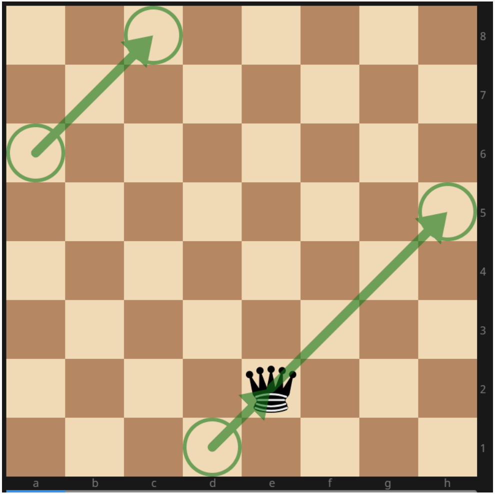
For comments on this paper [44], see p. 613.

237 COMBINATORICS

Über die "doppelt-periodischen" Lösungen des n-Damen-Problems

- Publié en 1918
- Le problème des n-dames doublement périodique, bref sur un tore!

Les dames sur un tore



How to Solve It?

Combien y a-t-il de solutions au problème de huit dames pour un échiquier toroïdal?

Solutions du public

Qu'avez-vous trouvé?

Réponse à la question...

Il n'y en a pas!

Réponse à la question...

Il n'y en a pas!

S'il y en avait une, il y aurait une dame par colonne, une par ligne et une par diagonale.

Réponse à la question...

Il n'y en a pas!

S'il y en avait une, il y aurait une dame par colonne, une par ligne et une par diagonale. Notons (rangée,colonne,diagonale) :

(8,1,7)	(8,2,6)	(8,3,5)	(8,4,4)	(8,5,3)	(8,6,2)	(8,7,1)	(8,8,8)
(7,1,8)	(7,2,7)	(7,3,6)	(7,4,5)	(7,5,4)	(7,6,3)	(7,7,2)	(7,8,1)
(6,1,1)	(6,2,8)	(6,3,7)	(6,4,6)	(6,5,5)	(6,6,4)	(6,7,3)	(6,8,2)
(5,1,2)	(5,2,1)	(5,3,8)	(5,4,7)	(5,5,6)	(5,6,5)	(5,7,4)	(5,8,3)
(4,1,3)	(4,2,2)	(4,3,1)	(4,4,8)	(4,5,7)	(4,6,6)	(4,7,5)	(4,8,4)
(3,1,4)	(3,2,3)	(3,3,2)	(3,4,1)	(3,5,8)	(3,6,7)	(3,7,6)	(3,8,5)
(2,1,5)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,4,2)	(2,5,1)	(2,6,8)	(2,7,7)	(2,8,6)
(1,1,6)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,4,3)	(1,5,2)	(1,6,1)	(1,7,8)	(1,8,7)

…version problémiste!

(8,1,7)	(8,2,6)	(8,3,5)	(8,4,4)	(8,5,3)	(8,6,2)	(8,7,1)	(8,8,8)
(7,1,8)	(7,2,7)	(7,3,6)	(7,4,5)	(7,5,4)	(7,6,3)	(7,7,2)	(7,8,1)
(6,1,1)	(6,2,8)	(6,3,7)	(6,4,6)	(6,5,5)	(6,6,4)	(6,7,3)	(6,8,2)
(5,1,2)	(5,2,1)	(5,3,8)	(5,4,7)	(5,5,6)	(5,6,5)	(5,7,4)	(5,8,3)
(4,1,3)	(4,2,2)	(4,3,1)	(4,4,8)	(4,5,7)	(4,6,6)	(4,7,5)	(4,8,4)
(3,1,4)	(3,2,3)	(3,3,2)	(3,4,1)	(3,5,8)	(3,6,7)	(3,7,6)	(3,8,5)
(2,1,5)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,4,2)	(2,5,1)	(2,6,8)	(2,7,7)	(2,8,6)
(1,1,6)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,4,3)	(1,5,2)	(1,6,1)	(1,7,8)	(1,8,7)

...version problémiste!

(8,1,7)	(8,2,6)	(8,3,5)	(8,4,4)	(8,5,3)	(8,6,2)	(8,7,1)	(8,8,8)
(7,1,8)	(7,2,7)	(7,3,6)	(7,4,5)	(7,5,4)	(7,6,3)	(7,7,2)	(7,8,1)
(6,1,1)	(6,2,8)	(6,3,7)	(6,4,6)	(6,5,5)	(6,6,4)	(6,7,3)	(6,8,2)
(5,1,2)	(5,2,1)	(5,3,8)	(5,4,7)	(5,5,6)	(5,6,5)	(5,7,4)	(5,8,3)
(4,1,3)	(4,2,2)	(4,3,1)	(4,4,8)	(4,5,7)	(4,6,6)	(4,7,5)	(4,8,4)
(3,1,4)	(3,2,3)	(3,3,2)	(3,4,1)	(3,5,8)	(3,6,7)	(3,7,6)	(3,8,5)
(2,1,5)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,4,2)	(2,5,1)	(2,6,8)	(2,7,7)	(2,8,6)
(1,1,6)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,4,3)	(1,5,2)	(1,6,1)	(1,7,8)	(1,8,7)

- La somme des indices pour chaque position possible est un multiple de 8
- Une solution serait trois permutations : les 8 rangées, les 8 colonnes et les 8 diagonales.

...version problémiste!

(8,1,7)	(8,2,6)	(8,3,5)	(8,4,4)	(8,5,3)	(8,6,2)	(8,7,1)	(8,8,8)
(7,1,8)	(7,2,7)	(7,3,6)	(7,4,5)	(7,5,4)	(7,6,3)	(7,7,2)	(7,8,1)
(6,1,1)	(6,2,8)	(6,3,7)	(6,4,6)	(6,5,5)	(6,6,4)	(6,7,3)	(6,8,2)
(5,1,2)	(5,2,1)	(5,3,8)	(5,4,7)	(5,5,6)	(5,6,5)	(5,7,4)	(5,8,3)
(4,1,3)	(4,2,2)	(4,3,1)	(4,4,8)	(4,5,7)	(4,6,6)	(4,7,5)	(4,8,4)
(3,1,4)	(3,2,3)	(3,3,2)	(3,4,1)	(3,5,8)	(3,6,7)	(3,7,6)	(3,8,5)
(2,1,5)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,4,2)	(2,5,1)	(2,6,8)	(2,7,7)	(2,8,6)
(1,1,6)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,4,3)	(1,5,2)	(1,6,1)	(1,7,8)	(1,8,7)

- La somme des indices pour chaque position possible est un multiple de 8
- Une solution serait trois permutations : les 8 rangées, les 8 colonnes et les 8 diagonales.
- Or,

$$3\left(\sum_{k=1}^{8} k\right) = 3\frac{8\cdot 9}{2} = 216 = 2^2 \cdot 3^3$$

n'est pas un multiple de 8.

...version problémiste!

(8,1,7)	(8,2,6)	(8,3,5)	(8,4,4)	(8,5,3)	(8,6,2)	(8,7,1)	(8,8,8)
(7,1,8)	(7,2,7)	(7,3,6)	(7,4,5)	(7,5,4)	(7,6,3)	(7,7,2)	(7,8,1)
(6,1,1)	(6,2,8)	(6,3,7)	(6,4,6)	(6,5,5)	(6,6,4)	(6,7,3)	(6,8,2)
(5,1,2)	(5,2,1)	(5,3,8)	(5,4,7)	(5,5,6)	(5,6,5)	(5,7,4)	(5,8,3)
(4,1,3)	(4,2,2)	(4,3,1)	(4,4,8)	(4,5,7)	(4,6,6)	(4,7,5)	(4,8,4)
(3,1,4)	(3,2,3)	(3,3,2)	(3,4,1)	(3,5,8)	(3,6,7)	(3,7,6)	(3,8,5)
(2,1,5)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,4,2)	(2,5,1)	(2,6,8)	(2,7,7)	(2,8,6)
(1,1,6)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,4,3)	(1,5,2)	(1,6,1)	(1,7,8)	(1,8,7)

- La somme des indices pour chaque position possible est un multiple de 8
- Une solution serait trois permutations : les 8 rangées, les 8 colonnes et les 8 diagonales.
- Or,

$$3\left(\sum_{k=1}^{8} k\right) = 3\frac{8\cdot 9}{2} = 216 = 2^2\cdot 3^3$$

  n'est pas un multiple de 8.
- Il ne peut donc pas y avoir de solution!

Solution de Pólya

Pólya considère le cas général d'un échiquier toroïdal $n \times n$.

Solution de Pólya

Pólya considère le cas général d'un échiquier toroïdal $n \times n$. Comme Gauss, une solution possible est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La condition toroïdale consiste en l'ajout d'un modulo aux conditions de diagonales.

Solution de Pólya

Pólya considère le cas général d'un échiquier toroïdal $n \times n$. Comme Gauss, une solution possible est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La condition toroïdale consiste en l'ajout d'un modulo aux conditions de diagonales. Cela revient à que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$y_k + k \not\equiv y_j + j \bmod n, \qquad y_k - k \not\equiv y_j - j \bmod n.$$

Solution de Pólya

Pólya considère le cas général d'un échiquier toroïdal $n \times n$. Comme Gauss, une solution possible est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La condition toroïdale consiste en l'ajout d'un modulo aux conditions de diagonales. Cela revient à que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$y_k + k \not\equiv y_j + j \bmod n, \qquad\qquad y_k - k \not\equiv y_j - j \bmod n.$$

Ou encore, que les fonctions

$$k \mapsto y_k, \qquad k \mapsto y_k + k \bmod n, \qquad k \mapsto y_k - k \bmod n$$

soient des bijections de $(1, \ldots, n)$ vers $(1, \ldots, n)$.

Théorème de Pólya

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$.

Théorème de Pólya, preuve 1

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Leftarrow$

Si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$, alors $k \mapsto 2k \bmod n$ est une solution. En effet, comme $2 \nmid n$, c'est une bijection.

Théorème de Pólya, preuve 1

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\text{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Leftarrow$

Si $\text{pgcd}(n, 6) = 1$, alors $k \mapsto 2k \bmod n$ est une solution. En effet, comme $2 \nmid n$, c'est une bijection. Comme $3 \nmid n$, la fonction $k \mapsto 2k + k \bmod n$ est une bijection.

Théorème de Pólya, preuve 1

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\text{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Leftarrow$

Si $\text{pgcd}(n, 6) = 1$, alors $k \mapsto 2k \bmod n$ est une solution. En effet, comme $2 \nmid n$, c'est une bijection. Comme $3 \nmid n$, la fonction $k \mapsto 2k + k \bmod n$ est une bijection. Comme $k \mapsto 2k - k \bmod n$ est trivialement une bijection, les trois conditions sont respectées.

Théorème de Pólya, preuve 2

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Rightarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$,

Théorème de Pólya, preuve 2

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Rightarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - j) \equiv \sum_{j=1}^{n} j \bmod n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \bmod n$$

Théorème de Pólya, preuve 2

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Rightarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - j) \equiv \sum_{j=1}^{n} j \bmod n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \bmod n$$

Mais

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - j) = \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} j = 0.$$

Théorème de Pólya, preuve 2

Problème des n dames sur un tore

Le problème des n dames sur un tore admet une solution si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$.

Preuve $\Rightarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - j) \equiv \sum_{j=1}^{n} j \bmod n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \bmod n$$

Mais

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - j) = \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} j = 0.$$

Donc, n divise $n(n+1)/2$, un nombre impair. Bref, $2 \nmid n$.

Théorème de Pólya, preuve 2

Preuve $\Leftarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ et $k \mapsto y_k + k \bmod n$ sont des permutations de $\{1, \ldots, n\}$,

Théorème de Pólya, preuve 2

Preuve $\Leftarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ et $k \mapsto y_k + k \bmod n$ sont des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j + j)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} (y_j - j)^2 \equiv \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \mod n.$$

Théorème de Pólya, preuve 2

Preuve $\Leftarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ et $k \mapsto y_k + k \bmod n$ sont des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j + j)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} (y_j - j)^2 \equiv \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \bmod n.$$

Avec $(y_j + j)^2 = y_j^2 + 2y_j j + j^2$ et $(y_j - j)^2 = y_j^2 - 2y_j j + j^2$

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - j)^2 + \sum_{j=1}^{n} (y_j + j)^2 \equiv 4 \sum_{j=1}^{n} j^2 \bmod n.$$

Théorème de Pólya, preuve 2

Preuve $\Leftarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ et $k \mapsto y_k + k \bmod n$ sont des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j + j)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n}(y_j - j)^2 \equiv \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \bmod n.$$

Avec $(y_j + j)^2 = y_j^2 + 2y_jj + j^2$ et $(y_j - j)^2 = y_j^2 - 2y_jj + j^2$

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j - j)^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j + j)^2 \equiv 4\sum_{j=1}^{n} j^2 \bmod n.$$

Mais en développant, cela donne

$$\frac{n}{3} \equiv \frac{2n}{3} \bmod n$$

donc 3 ne divise donc pas n.

Théorème de Pólya, preuve 2

Preuve $\Leftarrow$

Soit $k \mapsto y_k$ une solution. Cela veut dire que $k \mapsto y_k - k \bmod n$ et $k \mapsto y_k + k \bmod n$ sont des permutations de $\{1, \dots, n\}$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j + j)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n}(y_j - j)^2 \equiv \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \bmod n.$$

Avec $(y_j + j)^2 = y_j^2 + 2y_j j + j^2$ et $(y_j - j)^2 = y_j^2 - 2y_j j + j^2$

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j - j)^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j + j)^2 \equiv 4\sum_{j=1}^{n} j^2 \bmod n.$$

Mais en développant, cela donne

$$\frac{n}{3} \equiv \frac{2n}{3} \bmod n$$

donc 3 ne divise donc pas n. Comme n n'est ni divisible par 2, ni par 3, alors $\mathrm{pgcd}(n, 6) = 1$. $\square$

Conclusion

- Analyser les bornes sur le nombre de solutions
- Tester des méthodes algorithmiques

Conclusion

- Analyser les bornes sur le nombre de solutions
- Tester des méthodes algorithmiques
- Solveur quantique
- Erbas, Tanik et Nair (1993) Storage de mémoire parallèle
- Yang, Wang, Liu et Chang (2001) Procession d'images,
- Dean et Parisi (1998) Transition de phase
- Yamamoto, Kitamura et Yoshikura (1984) Modèle d'acides nucléiques

Questions?

References i

Bell, J., and Stevens, B.
A survey of known results and research areas for n-queens.
Discrete Mathematics 309, 1 (2009), 1 – 31.

Campbell, P. J.
Gauss and the eight queens problem: A study in miniature of the propagation of historical error.
Historia mathematica 4, 4 (1977), 397–404.

Peters, C.
***Briefwechrel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*.**
1863.

Pólya, G.
Uber die "doppelt-periodischen" lösungen des n-damen-problems.
W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele 1 (1921), 364–374.

Rivin, I., Vardi, I., and Zimmermann, P.
The n-queens problem.
The American Mathematical Monthly 101, 7 (1994), 629–639.